

$a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $f$ ,  $(a, b)$  aralığında sürekli ve  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$  olsun.  $f$  nin  $(a, b)$  aralığında her gerçel değeri aldığını gösteriniz.

$\lambda \in \mathbb{R}$  olsun.

(Genelleştirilmiş Limit Teoreminden)  $\lim_{x \rightarrow a^+} (f(x) - \lambda) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow b^-} (f(x) - \lambda) = +\infty$  olur. Sonsuz limit tanımında bir  $a_1 \in (a, b)$  için  $(f(x) - \lambda) < 0$  (yani  $f(a_1) < \lambda$ ) ve bir  $b_1 \in (a_1, b)$  için  $(f(x) - \lambda) > 0$  (yani  $f(b_1) > \lambda$ ) ve  $f$ ,  $[a_1, b_1]$  aralığında sürekli (çünkü  $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ ) olduğundan (Ara Değer Teoremi gereği) bir  $c \in (a_1, b_1) \subset (a, b)$  için  $f(c) = \lambda$  olur.