MT 131 Final Sınavı 2007 Çözümler

1. (a) Kapalı türev alma yöntemi ile: $\frac{d}{dx}(\tan\frac{x}{y}+x^2y^3)=\frac{d}{dx}(1)$

$\sec^2\frac{x}{y}\cdot(\dfrac{y-xy'}{y^2})+(2xy^3+3x^2y^2y')=0$

$y'(-\frac{x}{y^2}\sec^2\frac{x}{y}+3x^2y^2)=-\frac{1}{y}\sec^2\frac{x}{y}-2xy^3$

$y'=\dfrac{-\frac{1}{y}\sec^2\frac{x}{y}-2xy^3}{-\frac{x}{y^2}\sec^2\frac{x}{y}+3x^2y^2}=\dfrac{y\sec^2\frac{x}{y}+2xy^5}{x\sec^2\frac{x}{y}-3x^2y^4}$

(b) $f(x)=\sqrt[3]{x},\ a=64,\ b=65$ için $\sqrt[3]{65}\approx P_2(65)$ ve Hata$=|R_3|$ olur.

$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},\ f''(x)=\frac{-2}{9}x^{-\frac{5}{3}},\ f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}$ olur.

$P_2(x)=4+\frac{1}{3\cdot4^2}(x-64)-\frac{2}{9\cdot4^5\cdot2!}(x-64)^2=4+\frac{1}{48}(x-64)-\frac{1}{9216}(x-64)^2$

$\sqrt[3]{65}\approx4+\frac{1}{48}-\frac{1}{9216}$

(Bir $c\in(64,65)$ için) Hata$=\dfrac{f'''(c)}{3!}(65-64)^3=\dfrac{10}{27\cdot c^{\frac{8}{3}}\cdot6}=\dfrac{5}{81\cdot c^{\frac{8}{3}}}$ olur.

$64<c<65$ olduğundan $c^{\frac{8}{3}}>64^{\frac{8}{3}}=4^8$ ve dolayısıyla

Hata$<\frac{5}{81\cdot4^8}=\frac{5}{5308416}$ olur.

2. (a) f, a da sürekli olduğundan

$f(a)=\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)-(mx+n)}{x-a}(x-a)+(mx+n)\right)=ma+n$

(Kısaca: bölümün limiti var ve paydanın limiti 0 olduğundan, payın da limiti 0 olmalıdır) olur. $x\neq a$ için

$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\dfrac{f(x)-(mx+n)+(mx+n)-(ma+n)}{x-a}=\dfrac{f(x)-(mx+n)}{x-a}+m$

olduğundan

$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)-(mx+n)}{x-a}+m\right)=0+m=m$ bulunur.

(b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ olduğundan L'Hospital Kuralı ile

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty$ olur. Yatay asimptot yoktur. $\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\ln x}=\frac{0}{-\infty}=0$.

$x>1$ için $\frac{x}{\ln x}>0$ ve $\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x}{x}=0$ olduğundan $\lim_{x\to1^+}\frac{x}{\ln x}=+\infty$ olur . ($f(x)$, her $x>0, x\neq1$ için sürekli olduğundan) düşey asimptot yalnızca $x=1$ de vardır. $f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$ olduğundan e yegane kritik sayıdır. $1<x<e$ için $f'(x)<0$ ve $x>e$ için $f'(x)>0$ ve f, e de sürekli olduğundan I. Türev testinden $f(x)$, e de bir yerel minimuma erişir.

3. (a) $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. $\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}x-x)=\frac{1}{1-x^2}-1$, $\frac{d}{dx}(\text{Arcsin}\,x-x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1$ Yine $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. $\frac{d}{dx}(\frac{1}{1-x^2}-1)=\frac{2x}{(1-x^2)^2}$, $\frac{d}{dx}(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1)=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ $\lim_{x\to0}\dfrac{\frac{2x}{(1-x^2)^2}}{\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}}=2$. İki kez L'Hospital kuralı ile

$\lim_{x\to0}\frac{\tanh^{-1}x-x}{\text{Arcsin}\,x-x}=2$

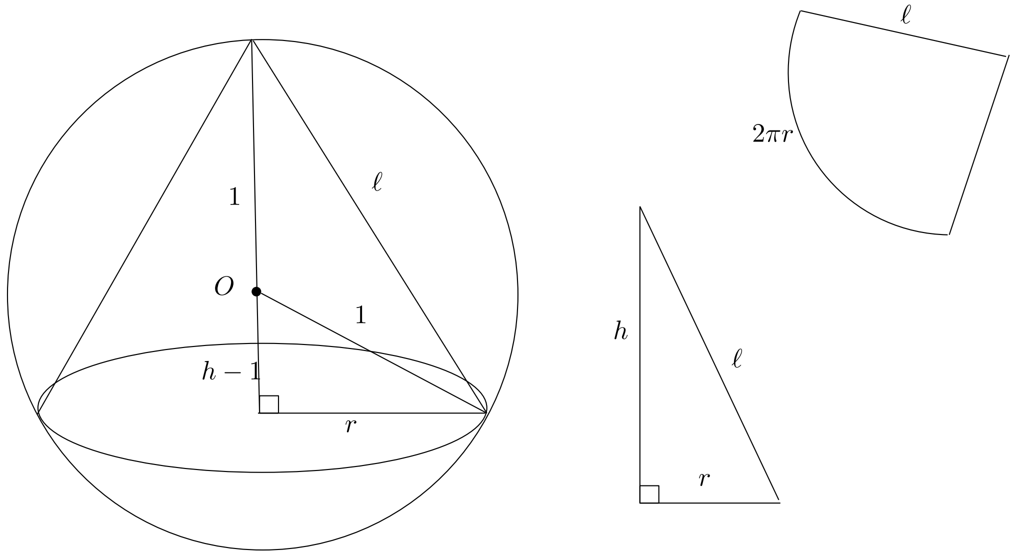
(b) 1^∞ belirsizliği vardır. $\ln(\cos\frac{1}{x})^x=x\ln(\cos\frac{1}{x})=\frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ $\frac{0}{0}$ belirsizliği.

$\frac{d}{dx}(\ln\cos\frac{1}{x}) = \dfrac{-\sin\frac{1}{x}\cdot(\frac{-1}{x^2})}{\cos\frac{1}{x}} = -\tan\frac{1}{x}\cdot(\frac{-1}{x^2}) \quad \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}) = \frac{-1}{x^2}.$

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-\tan\frac{1}{x}\cdot(\frac{-1}{x^2})}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} -\tan\frac{1}{x} = 0$ (Bileşkenin limiti teoreminden)

L' Hospital Kuralından $\lim_{x\to+\infty} x\ln(\cos\frac{1}{x}) = 0$ ve bileşkenin limiti teoreminden (e^x, 0 da sürekli)

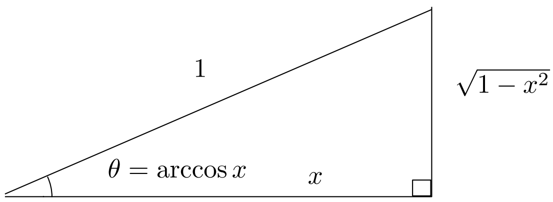
$\lim_{x\to+\infty}(\cos\frac{1}{x})^x = e^{\lim_{x\to+\infty} x\ln(\cos\frac{1}{x})} = e^0 = 1$ olur.



4. $S = \pi r\ell = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$ maksimum yapılacak. ($h < 1$ de olabilir ama bulacağımız formüller değişmez) Pisagor toereminden $(h-1)^2 + r^2 = 1$ Buradan $r = \sqrt{2h-h^2}$ ve $S = \pi\sqrt{(2h-h^2)(2h)} = \pi\sqrt{4h^2-2h^3}$ bulunur. $S = f(h) = \pi\sqrt{4h^2-2h^3}$ maksimum yapılacak. $0 < h < 2$ olmalıdır. 0 ve 2 sayılarında fonksiyon sürekli ve değeri 0 olduğundan $[0,2]$ aralığı kullanılabilir. $f'(h) = \pi\frac{4h-3h^2}{\sqrt{4h^2-2h^3}} = 0$ (içteki yegane kritik sayı $h = \frac{4}{3}$ ve $f(\frac{4}{3}) > 0, f(0) = f(2) = 0$ olduğundan maksimum değere $h = \frac{4}{3}$ iken ulaşılır. $r = \sqrt{2h-h^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ olur.Veya (0 ve 2 yi hiç gözönüne almadan):

	0		$\frac{4}{3}$		2
$f'(h)$		+		$-$	
$f(h)$		$\nearrow$		$\searrow$	
			Maks		

5. (a) i. $x > 0$ için:



den $\tan(\operatorname{Arccos} x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ olur. $x < 0$ iken $-x > 0$ olduğu için, yukarıdaki eşitlikten

$\frac{\sqrt{1-(-x)^2}}{-x} = \tan(\operatorname{Arccos}(-x)) = \tan(\pi - \operatorname{Arccos} x) = -\tan(\operatorname{Arccos} x)$

olur. Her iki taraf -1 ile çarpılarak $x<0$ için de $\tan(\operatorname{Arccos} x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ olduğu gösterilmiş olur.

ii. $y=\tanh^{-1}x$ olsun. $\tanh y=x$, $\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}=x$ olur. $u=e^y$ alınırsa $\frac{u^2-1}{u^2+1}=x$, $(1-x)u^2=1+x$ ve $u=\pm\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ve $u=e^y\geq 0$ olduğundan $u=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ve $\tanh^{-1}x=y=\ln u=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ bulunur.

(b) $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}(\frac{-1}{x^2})$, $f''(x)=e^{\frac{1}{x}}(\frac{-1}{x^2})^2+e^{\frac{1}{x}}(\frac{2}{x^3})=e^{\frac{1}{x}}\frac{1+2x}{x^4}=0$, $x=-\frac{1}{2}$

		$-\frac{1}{2}$		0	
$f''(x)$	$-$		$+$	‖	$-$
Grafik	$\frown$		$\smile$	‖	$\smile$
		Bük. Nok.			

$f(x)$, $-\frac{1}{2}$ de türevlenebildiği ve bükeyliği değiştiği için büküm noktasına sahiptir. $f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{e^2}$
Büküm noktası: $(-\frac{1}{2},\frac{1}{e^2})$