MT 131
FİNAL SINAVI ÇÖZÜMLER

1. (a) Sonsuz Limit tanımı gereği, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ olması, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ ve a yı içeren bir açık aralıkta (belki a dışında) $f(x) < 0$ olması demektir. Sonlu limitler için Limit Teoreminden
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \cdot (-2) = 0$ olur.
$\lim_{x\to a} g(x) = -2 < 0$ olduğundan (uygun bir adı olmayan) Limit Teoremlerinden biri gereği a yı içeren bir açık aralıkta (belki a dışında) $g(x) < 0$ olur.
Dolayısıyla, a yı içeren bir (f nin ve g nin negatif olduğu açık aralıkların kesişimi olan) açık aralıkta (belki a dışında) $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ olur. Sonsuz limit tanımı gereği, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ olur.

   (b) $g(x) = (x+1)^2 e^{-x}$ için:
$g'(x) = (1-x^2)e^{-x}$ Kritik sayılar: ± 1
$g''(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}$ Büküm Noktası Adayları: $1 \pm \sqrt{2}$

		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$	
$f'(x)$	$-$		$+$		$+$		$-$		$-$
Artanlık/Azalanlık	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$
$f''(x)$	$+$		$+$		$-$		$-$		$+$
Bükeylik	$\smile$		$\smile$		$\frown$		$\frown$		$\smile$

Bu tablodan:
f, ± 1 de sürekli olduğundan (I. Türev Testinden)
-1 de bir yerel minimuma ve 1 de bir yerel maksimuma erişir.
f, $1 \pm \sqrt{2}$ de (türevlenebiliyor ve bükeylik değiştiği için) büküm noktalarına sahiptir.

2. (a) Ters Fonksiyonun Türevlenebilmesi Teoreminden, $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, $(y = f(x))$ dir. $f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2}$ ve $f(0) = 1$ olduğundan $g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$ bulunur.
$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$ özdeşliğinde her iki tarafın türevi alınırsa,
$g''(f(x))f'(x) = \frac{-f''(x)}{(f'(x))^2}$ dolayısıyla $g''(f(x)) = \frac{-f''(x)}{(f'(x))^3}$ elde edilir.
$f(0) = 1$ ve $f''(0) = 0$ olduğundan, $g''(1) = 0$ bulunur.

   (b) i. $y = \operatorname{Arcsec} x$ olsun. ($x > 0$ olduğundan) $0 \le y < \frac{\pi}{2}$ ve $\sec y = x$ olur.
$\tan^2 y = \sec^2 y - 1 = x^2 - 1$ olur. $y \in [0, \frac{\pi}{2})$ için $\tan y \ge 0$ olduğundan $\tan y = \sqrt{x^2-1}$ bulunur. Ayrıca, $y \in [0, \frac{\pi}{2})$ olduğundan $y = \operatorname{Arctan} \sqrt{x^2-1}$ elde edilir.

   ii. $x \le -1$ için $\operatorname{Arctan} \sqrt{x^2-1} \in [0, \frac{\pi}{2})$ ve ($x \le -1$ için) $\operatorname{Arcsec} x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ olduğundan $\operatorname{Arctan} \sqrt{x^2-1} \neq \operatorname{Arcsec} x$ olur.

3. (a) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin(x^2))^{x^2}$ (0^0 belirsizliği) $\ln(\sin(x^2))^{x^2} = x^2 \ln(\sin(x^2))$ olur.
$\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln(\sin(x^2)) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sin(x^2))}{\frac{1}{x^2}}$, $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği.
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{2x\cos(x^2)}{\sin(x^2)}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\frac{\sin(x^2)}{x^2}} (-x^2 \cos(x^2))$
$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ ve $t = x^2$ için $\lim\limits_{x\to 0} t = 0$ ve $x \neq 0$ için $t \neq 0$ olduğundan Limit için Değişken Değiştirme Teoreminden $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{x^2} = 1$ olur.
$\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ ve $\cos$, 0 da sürekli olduğundan, Bileşkenin Limiti Teoreminden $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x^2) = \cos 0 = 1$

olur. Limit Teoreminden,
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\frac{\sin(x^2)}{x^2}}(-x^2\cos(x^2)) = \dfrac{1}{1}\cdot(-1)\cdot 0\cdot 1 = 0$

L'Hospital Kuralından, $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(\sin(x^2)) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin(x^2))}{\frac{1}{x^2}} = 0$ olur.

$\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(\sin(x^2)) = 0$ ve üst, 0 da sürekli olduğundan, Bileşkenin Limiti Teoreminden, $\lim\limits_{x\to 0}(\sin(x^2))^{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\text{üst}(x^2\ln(\sin(x^2))) = \text{üst}(0) = e^0 = 1$ olur.

(b) (∞^0 belirsizliği) $\ln\left(x^{\sin\frac{1}{x}}\right) = \sin\frac{1}{x}\ln x$ dir. Birinci Çözüm:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}}$ ($\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos\frac{1}{x}(-\frac{1}{x^2})}{\sin^2\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sin^2\frac{1}{x}}{\cos\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(x\sin\tfrac{1}{x}\right)\tan\tfrac{1}{x} = \lim_{t\to 0^+}\left(\tfrac{\sin t}{t}\right)\tan t = 1\cdot 0 = 0$$

olur. L'Hospital Kuralından, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}\ln x = 0$ bulunur.
üst fonksiyonu 0 da sürekli olduğundan, Bileşkenin Limiti Teoreminden,
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\sin\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\text{üst}(\sin\frac{1}{x}\ln x) = \text{üst}(0) = 1$ bulunur.
İkinci Çözüm:
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\sin\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to 0^+}\left(\dfrac{1}{t}\right)^{\sin t} = \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t^{\sin t}}$

$\ln t^{\sin t} = \sin t\ln t = \frac{\ln t}{\frac{1}{\sin t}}$ ($\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği) $\frac{\frac{1}{t}}{\frac{-\cos t}{\sin^2 t}} = -\left(\frac{\sin t}{t}\right)\tan t$ olur.

$\lim\limits_{t\to 0^+} -\left(\frac{\sin t}{t}\right)\tan t = (-1)\cdot 1\cdot 0 = 0$ olduğundan L'Hospital Kuralından, $\lim\limits_{t\to 0^+}\sin t\ln t = 0$ olur.

$\lim\limits_{t\to 0^+}\sin t\ln t = 0$ ve üst fonksiyonu 0 da sürekli olduğundan, Bileşkenin Limiti Teoreminden $\lim\limits_{t\to 0^+} t^{\sin t} = \lim\limits_{t\to 0^+}\text{üst}(\sin t\ln t) = \text{üst}(0) = 1$ olur. Limit Teoreminden,
$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t^{\sin t}} = \dfrac{1}{1} = 1$ bulunur. Yukarıda gösterildiği gibi, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\sin\frac{1}{x}} = 1$ olur.

4. (a) $y = \coth^{-1} x$ olsun. $\coth y = x$ olur. $\dfrac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} = x$ olur.
$(1-x)e^y = -(x+1)e^{-y}$ olur.
$(e^y)^2 = \frac{x+1}{x-1}$ olur. $e^y > 0$ olduğundan
$e^y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ olur.
$y = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$ olur. Dolayısıyla, $\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$ bulunur.

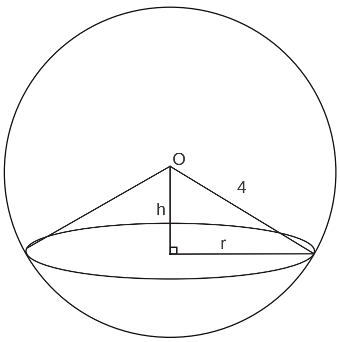
(b) $f(x) = \left\lfloor\dfrac{2x}{1+x^2}\right\rfloor$ fonksiyonu, $\frac{2x}{1+x^2}\notin\mathbb{Z}$ şeklindeki noktalarda süreklidir. Verilen eşitsizlikten, $\frac{2x}{1+x^2} = 0, -1, 1$ şeklindeki noktaları incelemek yeterlidir. Bunların da yegane çözümlerinin (sırasıyla) $x = 0,\ x = -1$ ve $x = 1$ olduğu kolayca bulunur.

i. $0 < x < 1$ için $0 < \frac{2x}{1+x^2} < 1$ olduğu için,
$\lim\limits_{x\to 0^+}\left\lfloor\dfrac{2x}{1+x^2}\right\rfloor = \lim\limits_{x\to 0^+} 0 = 0$ olur.
$-1 < x < 0$ için $-1 < \frac{2x}{1+x^2} < 0$ olduğu için,
$\lim\limits_{x\to 0^-}\left\lfloor\dfrac{2x}{1+x^2}\right\rfloor = \lim\limits_{x\to 0^-} -1 = -1$ olur. 0 da Sıçrama Tipi Süreksizlik vardır.

ii. $x > 0,\ x \neq 1$ için $0 < \frac{2x}{1+x^2} < 1$ olduğu için,
$\lim\limits_{x\to 1} \left\lfloor \dfrac{2x}{1+x^2} \right\rfloor = \lim\limits_{x\to 1} 0 = 0$ olur. $f(1) = 1$ olduğundan, 1 de Kaldırılabilir Süreksizlik vardır.

iii. $x < 0, x \neq -1$ için $-1 < \frac{2x}{1+x^2} < 0$ olduğu için,
$\lim\limits_{x\to -1} \left\lfloor \dfrac{2x}{1+x^2} \right\rfloor = \lim\limits_{x\to -1} -1 = -1$ olur. $f(-1) = -1$ olduğundan, f, -1 de süreklidir.

5



r : koninin taban yarıçapı; h; yüksekliği olsun.
Koninin hacmi Maksimum Yapılacak.
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ Maksimum yapılacak.
Pisagor teoreminden, $r^2 + h^2 = 16$ ve buradan, $r^2 = 16 - h^2$ olur.
$V = \frac{\pi}{3}(16h - h^3)$ maksimum yapılacak.
(koni küre içinde kalacağı için) $0 < h < 4$ olmak zorundadır.
$f(h) = \frac{\pi}{3}(16h - h^3),\ (0,4)$ aralığında maksimum yapılacak.
$f'(h) = \frac{\pi}{3}(16 - 3h^2)$ kritik sayılar: $\pm\frac{4}{\sqrt{3}}$. Sadece $\frac{4}{\sqrt{3}}$, (0,4) aralığındadır:

	$-\frac{4}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	4	
$f'(x)$	−	+	+	−	−
			↗	↘	

$f'(x)$ in işaretinden ve f nin $\frac{4}{\sqrt{3}}$ de sürekli oluşundan; f nin, (0,4) aralığındaki maksimum değerine $h = \frac{4}{\sqrt{3}}$ noktasında ulaştığı görülür. $r = \sqrt{\frac{32}{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ bulunur.

6 (a) $f(x) = \text{Arctan}\, x, b = \frac{1}{2},\ a = 0$ olsun. $f'(x) = \frac{1}{1+x^2},\ f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},\ f'''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$ olur. ($f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = -2$ olduğundan) $P_3(x) = x - \frac{1}{3}x^3,\ P_3(\frac{1}{2}) = \frac{11}{24}$ olur. $\text{Arctan}\,\frac{1}{2} \approx \frac{11}{24}$ olur.

(b) $f(x) = \sin x,\ b = \frac{1}{3},\ a = 0$ alınacağı soruda belirtilmiştir. $f^{(n)}(x) = \begin{cases} \pm\sin x & n \text{ çift ise} \\ \pm\cos x & n \text{ tek ise} \end{cases}$ olur. Her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için Kalanlı Taylor Teoreminin koşulları ($\mathbb{R}$ aralığında) sağlanır. Öyleyse (her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için)
$\sin\frac{1}{3} = P_n(\frac{1}{3}) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ olacak şekilde (n ye bağlı) $c \in (0, \frac{1}{3})$ sayıları vardır.
$\sin\frac{1}{3} \approx P_n(\frac{1}{3})$ yaklaşık eşitliğinde hata$= |R_n| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right|$ olacak şekilde (n ye bağlı) $c \in (0, \frac{1}{3})$ sayıları var olduğundan, (ve her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için) $|f^{(n+1)}(c)| \leq 1$ olduğundan,
hata$\leq \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ olur. $n \geq 4$ için ($3^5 \cdot 5! = 243 \times 120 > 10^4$ oluşundan) $\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} < 10^{-4}$ olduğu görülür. Dolayısıyla $n \geq 4$ seçildiğinde ($\sin\frac{1}{3} \approx P_n(\frac{1}{3})$ yaklaşık eşitliğinde)
Hata$< 10^{-4}$ olur.