MT 131 ANALİZ I (2017-2018 Güz) FİNAL SINAVI ÇÖZÜMLER

1. (a) $f(x) = x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$, $\quad f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}\left(\frac{5x+2}{x}\right)$ Kritik Sayılar: $-\frac{2}{5}, 0$

$f''(x) = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}(5x-1)$ Büküm Noktası Adayları: $0, \frac{1}{5}$

		$-\frac{2}{5}$		0		$\frac{1}{5}$	
f'	$+$	$\mid$	$-$	$\Vert$		$+$	
Artanlık	$\nearrow$	$\mid$	$\searrow$	$\Vert$		$\nearrow$	
f''		$-$		$\Vert$	$-$	$\mid$	$+$
Bükeylik		$\frown$		$\Vert$	$\frown$	$\mid$	$\smile$

I. Türev Testinden, (f her iki kritik noktada da sürekli) $-\frac{2}{5}$ de yerel maksimum, 0 da yerel minimum var.

0 da büküm noktası yok. $\frac{1}{5}$ de (türevlenebilir olduğundan teğet var) büküm noktası var.

(b) $f(x) = x + \ln x - e$, Her $x \in (0, +\infty)$ için $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ olur. $f(x) = x + \ln x - e = 1$ denkleminin tek çözümü $x = e$ dir. Ters fonksiyonun türevlenebilmesi Teoreminden, $g'(1) = \left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(e)} = \frac{1}{1+\frac{1}{e}} = \frac{e}{1+e}$ olur.

2. (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sinh^{-1} x - x}{\sin^3 x}$ limitinde $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$\frac{d}{dx}\left(\sinh^{-1} x - x\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$, $\quad \frac{d}{dx}\left(\sin^3 x\right) = 3\sin^2 x \cos x$

L'Hospital in Kuralı için koşullar sağlanıyor. Limit Teoremlerinden

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1}{3\sin^2 x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + 1\right)}{3\sin^2 x \cos x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + 1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^2+1} - 1}{3\sin^2 x \cos x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{3\sin^2 x \cos x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + 1\right)(x^2+1)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \frac{-1}{3\cos x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + 1\right)(x^2+1)} = \frac{-1}{6}$$

bulunur. L'Hospital' in Kuralından: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sinh^{-1} x - x}{\sin^3 x} = \frac{-1}{6}$ olur.

(b) Her $x \in [-1, +1]$ için $\operatorname{Arccos}(-x) = \pi - \operatorname{Arccos} x$ olduğunu gösteriniz.

Bu sorunun 3 farklı çözümü, 2011-2012 Dönemi Final Sınavı çözümlerinde (1. Soru) bulunabilir.

3. (a) $f(x) = \dfrac{x - 1 + \ln x}{x - 1}$ fonksiyonu (diğer noktalarda fonksiyon sürekli veya limit ön koşulu sağlanmadığı için) $x = 0$, $x = 1$ dışında düşey asimptota sahip olmaz.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - 1 + \ln x}{x - 1} = \frac{-1 - \infty}{0 - 1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$$

olduğundan $x = 0$ da düşey asimptot (y-ekseni) vardır.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x - 1 + \ln x}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \left(1 + \frac{\ln x}{x - 1}\right) = 1 + 1 = 2$$

(Logaritmanın Özellikleri Teoreminde, $\lim_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$ olduğu gösterildi)
olduğu için $x=1$ de düşey asimptot yoktur.
$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x-1+\ln x}{x-1}$ limitinde $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. L'Hospital in Kuralı için diğer koşullar sağlanır. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1+0=1$ olduğu için, L'Hospital in Kuralından, $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x-1+\ln x}{x-1}=1$ olur. $y=1$ doğrusu yatay asimptot olur.

(b) $\lim_{x\to+\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$ limitinde ∞^0 belirsizliği vardır. $\ln\left((x+2^x)^{\frac{1}{x}}\right)=\dfrac{\ln(x+2^x)}{x}$ olur. ($x\to+\infty$ için) $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. (L' Hospital in Kuralını kullanabiliriz)
$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1+2^x\ln 2}{x+2^x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1+2^x\ln 2}{x+2^x}$.
Yine $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği var. (L' Hospital in Kuralını kullanabiliriz)
$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2^x(\ln 2)^2}{1+2^x\ln 2}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln 2)^2}{2^{-x}+\ln 2}=\ln 2$ olur.
L'Hospital' in Kuralından: $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1+2^x\ln 2}{x+2^x}=\ln 2$,
Yine L'Hospital' in Kuralından: $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+2^x)}{x}=\ln 2$ bulunur.
Son olarak, $\exp x=e^x$ fonksiyonu $\ln 2$ de sürekli olduğundan
(Bileşkenin Limiti Teoremi kullanılarak),
$\lim_{x\to+\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\exp\left(\dfrac{\ln(x+2^x)}{x}\right)=\exp(\ln 2)=e^{\ln 2}=2$ elde edilir.

L' Hospital in Kuralını kullanmadan Çözüm:

$e<4$ olduğu için, her $x\geq 1$ için $\frac{d}{dx}(2^x-x)=2^x\ln 2-1\geq 2\ln 2-1=\ln 4-1>0$ olur. Ayrıca $2^1>1$ olduğu için

Her $x\geq 1$ için $2^x>x$ olur. Bu da, her $x\geq 1$ için $2^x<x+2^x<2\cdot 2^x$ olması demektir.

Buradan:

Her $x\geq 1$ için $2<(x+2^x)^{\frac{1}{x}}<2\cdot 2^{\frac{1}{x}}$ elde edilir.

(Bileşkenin Limiti Teoreminden) $\lim_{x\to+\infty}2^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\exp\left(\dfrac{\ln 2}{x}\right)=\exp 0=1$ dir.

$\lim_{x\to+\infty}2=\lim_{x\to+\infty}2\cdot 2^{\frac{1}{x}}=1$ olduğundan Sıkıştırma Teoreminden, $\lim_{x\to+\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}=2$ olur.

4. (a) $f(x)=\sin x,\ a=0,\ b=\frac{1}{3}$ olsun. $f(a)=0,\ f'(a)=1,\ f''(a)=0,\ f'''(a)=-1$ olduğu için $P_3(x)=x-\frac{x^3}{6}$ olur. $\sin\frac{1}{3}\approx P_3(\frac{1}{3})=\frac{1}{3}-\frac{1}{162}=\frac{53}{162}$ olur.

Kalanlı Taylor Teoreminden, $R_3=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(b-a)^4=\frac{\sin c}{1944}$ olacak şekilde bir

$c\in(0,\frac{1}{3})$ sayısı vardır. ($|\sin c|<|c|$ olduğunu da kullanarak)

Hata$=|R_3|=\frac{|\sin c|}{1944}<\frac{\frac{1}{3}}{1944}=\frac{1}{5832}$ olur.

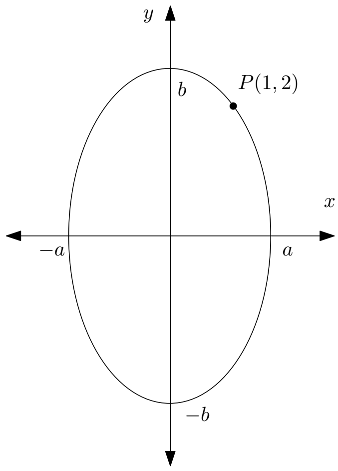
(b) $\sin x$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için istendiği kadar (sonsuz kez) türevlenebildiği için, Kalanlı Taylor Teoreminin koşulları her $n \in \mathbb{N}$ için ve her aralıkta sağlanır.

$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \pm \sin x & n \text{ çift} \\ \pm \cos x & n \text{ tek} \end{cases}$ olduğu için, her $n \in \mathbb{N}$ ve her $c \in \mathbb{R}$ için $|f^{(n+1)}(c)| \leq 1$ olur.

Buradan, her $n \in \mathbb{N}$ için $|R_n| \leq \frac{(\frac{1}{3})^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{3^{n+1}(n+1)!}$ olduğu görülür.

(Deneme ile) Her $n \geq 4$ için $3^{n+1}(n+1)! > 10^4$ olduğu bulunur. Bu da, her $n \geq 4$ için, $\sin \frac{1}{3} \approx P_n(\frac{1}{3})$ yaklaşık eşitliğinde hatanın 10^{-4} den az olacağı anlamına gelir.

5. $(\pm 1, \pm 2)$ noktalarından geçen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$ denklemine sahip elipsleri düşünelim.



Bu elipsler arasında en küçük alana sahip olanı için a ve b (pozitif) sayılarını bulmalıyız.

Böyle bir elipsin alanı πab dir. Bu değer minimum yapılacak.

Elipsin, $(\pm 1, \pm 2)$ noktalarından geçmesi için $\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$ olması gerekli ve yeterlidir.

Öyleyse, $(a^2 - 1)b^2 = 4a^2$, bu nedenle ($a, b > 0$ olduğu için) $b = \frac{2a}{\sqrt{a^2-1}}$ olmalıdır.

Elipsin Alanı$=\frac{2\pi a^2}{\sqrt{a^2-1}}$ minimum yapılacak.

$f(a) = \frac{2\pi a^2}{\sqrt{a^2-1}}$ minimum yapılacak.

$(\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$ eşitliğinden) $a > 1$ olmalıdır.

Öyleyse $f(a) = \frac{2\pi a^2}{\sqrt{a^2-1}} = 2\pi a^2(a^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ fonksiyonu $(1, +\infty)$ aralığında minimum yapılmalıdır.

$f'(a) = 2\pi \left(2a(a^2-1)^{-\frac{1}{2}} + a^2(-\frac{1}{2})(a^2-1)^{-\frac{3}{2}}(2a)\right) = 2\pi a(a^2-2)(a^2-1)^{-\frac{3}{2}}$ olur.

f nin $(1, +\infty)$ aralığındaki biricik kritik sayısı $\sqrt{2}$ dir.

f' nün işareti aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

	1		$\sqrt{2}$	
f'	|	$-$	|	$+$
f	|	$\searrow$	|	$\nearrow$

(f, $\sqrt{2}$ de sürekli olduğu için) f, $(1, +\infty)$ aralığındaki minimum değerine $a = \sqrt{2}$ de erişir.

Dolayısıyla elipsin dekleminde $a = \sqrt{2}$ ve $(\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$ eşitliğinden) $b = 2\sqrt{2}$ olmalıdır.

$(\pm 1, \pm 2)$ noktalarından geçen en küçük elipsin denklemi : $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ dir.