TERS FONKSİYONUN SÜREKLİLİĞİ İLE İLGİLİ BİR TEOREM

Ters Fonksiyonun Türevlenebilmesi Teoreminin ispatında gerek duyulan "Ters Fonksiyonun Sürekliliği Teoremi" nin ispatı, 1. sınıf Analiz derslerinde sözü edilmeyen bazı kavramların kullanılmasını gerektirir ve bu nedenle, ispatı genellikle 1. sınıflar için yazılan Analiz kitaplarında bulunmaz. Onun yerine, ispatı 1. sınıf Analiz dersi teknikleri ile yapılabilen, aşağıdaki (daha zayıf) teorem kullanılabilir.

Teorem: f, bir a sayısını içeren bir I açık aralığında sürekli, $f'(a) \neq 0$ olan ve bire-bir (1-1) bir fonksiyon ve $b = f(a)$ olsun. O zaman f^{-1} fonksiyonu b sayısında süreklidir.
İspat: Önce şu gözlemi yapalım:
(Limit tanımında, $\varepsilon = \frac{1}{2}|f'(a)|$ alınarak) a yı içeren (ve I içinde kalan) bir I_1 açık aralığındaki (a dışındaki) her x için $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| > \frac{1}{2}|f'(a)|$ olur.

Aynen iç ekstremum teoreminin ispatındaki gibi, f fonksiyonu I_1 aralığında $f(a)$ dan hem daha büyük hem de daha küçük değerlere ulaşır. Bu özellik ve Ara Değer Teoremi nedeniyle, f fonksiyonu, I_1 aralığında, $f(a)$ yı içeren bir J_1 açık aralığındaki tüm gerçel değerleri alır. Dolayısıyla f^{-1} fonksiyonu b yi içeren J_1 açık aralığında tanımlıdır. (J_1 açık aralık ve $b \in J_1$ olduğundan) $(b - \delta_0, b + \delta_0) \subset J_1$ olacak şekilde bir δ_0 pozitif sayısı bulabiliriz.

$\varepsilon > 0$ sayısı verilsin.
δ sayısını, $0 < \delta \leq \delta_0$ ve $\delta \leq \frac{1}{2}|f'(a)|\varepsilon$ olacak şekilde seçelim.
$0 < |y - b| < \delta$ olsun. $y \in J_1$ olduğundan $x = f^{-1}(y) \in I_1$ ve $x \neq a$ olur. Buradan:
$|f(x) - f(a)| > \dfrac{1}{2}|f'(a)||x - a|$ elde edilir.
$x = f^{-1}(y),\ a = f^{-1}(b)$ oluşundan

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| < \frac{|y - b|}{\frac{1}{2}|f'(a)|} < \frac{\delta}{\frac{1}{2}|f'(a)|} \leq \frac{\frac{1}{2}|f'(a)|\varepsilon}{\frac{1}{2}|f'(a)|} = \varepsilon$$

elde edilir ($y = b$ iken de $|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| = 0 < \varepsilon$ olur).
Böylece f^{-1} fonksiyonunun b de sürekli olduğu gösterilmiş olur.

Benzer şekilde, ters fonksiyonun, (aralık açık olmadığı zaman) aralığa ait uç noktalarda da (tek taraflı) sürekli oluşu ispatlanabilir.