$e^s,\ (s \in \mathbb{Q} \setminus \{0\})$ nin irrasyonel olduğunun ispatı

("Kitap'tan Deliller", İstanbul Bilgi Üniversitesi Yayınları / Matematik ve Bilgisayar Dizisi)

İspatta kullanmak üzere aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım:
$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f_n(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$ olsun. Bu polinomun şu özellikleri kolayca gösterilir:

1. Her $x \in (0,1)$ için $0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}$ olur.
2. $k > 2n$ için $f^{(k)}(x) = 0$ ve $0 \leq k < n$ için $f_n^{(k)}(0) = 0$
3. Her $k \geq 0$ için $f_n^{(k)}(0)$ ve $f_n^{(k)}(1)$ tamsayıdır.

Teorem: $e^s,\ (s \in \mathbb{Q} \setminus \{0\})$ irrasyoneldir.
İspat: Her $s \in \mathbb{N}$ için e^s nin irrasyonel olduğunu göstermek yeterlidir (Niçin?)

$e^s = \frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{N})$ olduğunu varsayalım. $n! > as^{2n+1}$ olacak şekilde seçelim ve (f_n yukarıda tanımlanan fonksiyon olmak üzere)

$$F(x) = s^{2n}f_n(x) - s^{2n-1}f_n'(x) + s^{2n-2}f_n''(x) \pm + \cdots + f_n^{(2n)}(x) \tag{1}$$

olarak tanımlayalım. Bundan sonra f_n yerine kısaca f yazacağız.
$k > 2n$ için $f^{(k)}(x) = 0$ olduğundan

$$F(x) = s^{2n}f(x) - s^{2n-1}f'(x) + s^{2n-2}f''(x) \pm + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} s^{2n-k}f^{(k)}(x) \tag{2}$$

olarak yazılabilir. Bu eşitlikten

$$F'(x) = -sF(x) + s^{2n+1}f(x)$$

elde edilir. Bu eşitlikten

$$\frac{d}{dx}\left(e^{sx}F(x)\right) = se^{sx}F(x) + e^{sx}F'(x) = s^{2n+1}e^{sx}f(x)$$

Diferansiyel-İntegral Hesabın Temel Teoreminden

$$b\int_0^1 s^{2n+1}e^{sx}f(x)\,dx = b\left(e^{sx}F(x)\right)\Big|_0^1 = aF(1) - bF(0)$$

elde edilir. Bu sayıya N diyelim. f nin özellikleri ve F nin tanımından N bir tamsayıdır. Diğer taraftan

$$0 < N = b\int_0^1 s^{2n+1}e^{sx}f(x)\,dx < bs^{2n+1}e^s\frac{1}{n!} = \frac{as^{2n+1}}{n!} < 1 \tag{3}$$

olur. Bu ise, N nin bir tamsayı olması ile çelişir.

Sonuç: Her $s \in \mathbb{Q},\ s > 0,\ s \neq 1$ için $\ln s$ irrasyoneldir.
İspatı siz yapınız!