MT 131 Analiz I Ara Sınav Çözümler

---

1. **a)** $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ ve } 12+4x-x^2 \geq 0 \text{ ve } \sqrt{12+4x-x^2} \neq 0\} =$ $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ ve } 12+4x-x^2 > 0\ \} = [0,+\infty) \cap (-2,6) = [0,6)$

   b) Kapalı türev alma yöntemi ile $2xy + x^2\frac{dy}{dx} + \sin(x+y)(1+\frac{dy}{dx}) = 0$ olur. Buradan $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2xy+\sin(x+y)}{x^2+\sin(x+y)}$ elde edilir.

2. **a)** $f(x) = \sin x + \cos x - x$ olsun. f tüm $\mathbb{R}$ de sürekli bir fonksiyondur. $f(0) = 1 > 0$ ve $f(\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$ ve $f, [0,\frac{\pi}{2}]$ aralığında sürekli olduğundan ($\lambda = 0$ alarak) Ara Değer Teoreminden en az bir $c \in (0,\frac{\pi}{2})$ için $f(c) = 0$ olur. Bu c sayısı için $\sin c + \cos c = c$ olur.

   b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $b = 123$, $a = 125$ olsun. $f(b) \approx f(a) + df = f(a) + f'(a)(b-a)$ dir. $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, f(a) = 5, f'(a) = \dfrac{1}{75}, b-a = -2$ dir. Buradan $\sqrt[3]{123} \approx 5 + \frac{-2}{75} = \frac{373}{75}$ elde edilir.

3. **a)** $\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} = \dfrac{(3-\sqrt{5+x})(3+\sqrt{5+x})(1+\sqrt{5-x})}{(1-\sqrt{5-x})(3+\sqrt{5+x})(1+\sqrt{5-x})} = \dfrac{(9-(5+x)(1+\sqrt{5-x})}{(1-(5-x))(3+\sqrt{5+x})} =$ $\dfrac{(4-x)(1+\sqrt{5-x})}{(x-4)(3+\sqrt{5+x})} = -\dfrac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}} (x \neq 4)$ olduğundan $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} =$ $\lim\limits_{x\to 4} -\dfrac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}} = \dfrac{-2}{6} = \dfrac{-1}{3}$ bulunur.

   b) $\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}} = \dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}(1+\sqrt{x})}{1-x}$, $t = x-1$ olsun $x \to 1$ iken $t \to 0$ ve $x \neq 1$ için $t \neq 0$ olduğundan değişken değişikliği yapabiliriz.

   $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}(1+\sqrt{x})}{1-x} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos\frac{\pi(1+t)}{2}(1+\sqrt{1+t})}{-t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{2})(1+\sqrt{1+t})}{-t} =$ $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{-\sin\frac{\pi t}{2}(1+\sqrt{1+t})}{-t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin\frac{\pi t}{2}(1+\sqrt{1+t})}{t}$

   $s = \frac{\pi t}{2}$ olsun $t \to 0$ iken $s \to 0$ ve $t \neq 0$ için $s \neq 0$ olduğundan değişken değişikliği yapabiliriz. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin\frac{\pi t}{2}(1+\sqrt{1+t})}{t} = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{\pi}{2} \dfrac{\sin s(1+\sqrt{1+\frac{2s}{\pi}})}{s} =$ π olur. ($t = \frac{\pi x - \pi}{2}$ alınarak tek bir de ğişken değişikliği ile de yapılabilirdi)

4. **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sin x}{\sqrt{x^2+1}}$ limitini bulun.$-1 \leq \sin x \leq 1$ olduğundan $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} \leq$ $\dfrac{x+\sin x}{\sqrt{x^2+1}} \leq \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ olur. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x \pm 1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(1 \pm \frac{1}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} =$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 \pm \frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1-0}{\sqrt{1+0}} = 1$ olduğundan Sandviç Teoreminden

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$ olur.

b) [ ]: tam değer fonksiyonu tamsayılar dışında sürekli, sin fonksiyonu heryerde sürekli olduğundan $f(x)$, $\sin x$ in tamsayı olmadığı her yerde süreklidir. Bu aralıkta $\sin x$ i tamsayı yapan x ler yalnızca $x = 0$ ve $x = \frac{\pi}{2}$ dir. $-1 < x < 0$ için $-1 < \sin x < 0$ olduğundan $\lim_{x\to0^-} \frac{[\sin x]}{x} = \lim_{x\to0^-} \frac{-1}{x} = +\infty$ dur($\lim_{x\to0^-} \frac{x}{-1} = 0$ ve $x < 0$ için $\frac{-1}{x} > 0$ olduğundan). f, 0 da sonsuz tipi süreksizliğe sahiptir.

$0 < x < \pi$, $x \neq \frac{\pi}{2}$ için $0 < \sin x < 1$ olduğundan $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{[\sin x]}{x} =$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{0}{x} = 0$ Ama $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi} \neq \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$ olduğundan f, $\frac{\pi}{2}$ de kaldırılabilir süreksizliğe sahiptir.

5. **a)** $f'(x) = \lim_{\Delta x\to0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to0} \frac{\frac{1}{2(x+\Delta x)-1} - \frac{1}{2x-1}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to0} \frac{\frac{-2\Delta x}{(2(x+\Delta x)-1)(2x-1)}}{\Delta x} =$ $\lim_{\Delta x\to0} \frac{-2}{(2(x+\Delta x)-1)(2x-1)} = \frac{-2}{(2x-1)^2}$

b) Eğer her $\epsilon > 0$ için

$|x-a| < \delta$ iken $|g(x)-g(a)| < \epsilon$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ gerçel sayısı bulunabiliyorsa g, a da süreklidir deriz. $\epsilon > 0$ verilsin

$|x-3| < \delta$ iken $|(x-3)^2 - 0| < \epsilon$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ gerçel sayısı bulmalıyız.

$|g(x)-g(a)| = |(x-3)^2 - 0| = |x-3|^2 < \delta^2 = \epsilon$ Yani $\delta = \sqrt{\epsilon}$ almak yeterlidir.