MT 131 ARA SINAVI (2007) ÇÖZÜMLER

1. (a) $R_f = \{y \in \mathbb{R} : y = \dfrac{1}{x^2+2x+3}$ o.ş. bir $x \in D_f$ var$\} = \{y \in \mathbb{R} : y(x^2+2x+3) = 1$ o.ş. bir $x \in D_f$ var$\} = \{y \in \mathbb{R} : yx^2+2yx+3y-1 = 0$ denkleminin bir gerçel x çözümü var$\}$ $y = 0$ için çözüm yok. $y \neq 0$ için ikinci derece bir denklem olduğundan, ancak ve yalnız $\Delta = 4y^2-4y(3y-1) \geq 0$ ise çözüm var. $R_f = \{y \in \mathbb{R} : y \neq 0$ ve $y - 2y^2 \geq 0\} = (0, \frac{1}{2}]$ (Veya $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2$ olduğundan fonksiyonun paydası $[2, +\infty)$ aralığındaki her değeri alır, başka bir değer alamaz. Dolayısıyla fonksiyon da $(0, \frac{1}{2}]$ aralığındaki her değeri alır başka değer alamaz.)

   (b) $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$ olsun. $f,\ I$ aralığında artan olduğundan $f(x_1) \leq f(x_2)$ olur. $f(x_1) < f(x_2)$ ise $f(x_1), f(x_2) \in J,\ f(x_1) < f(x_2)$ ve $g,\ J$ aralığında azalan olduğundan $g(f(x_1)) \geq g(f(x_2))$ olur. $f(x_1) = f(x_2)$ ise $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ olacağından her iki durumda da $(g \circ f)(x_1) \geq (g \circ f)(x_2)$ doğrudur. Bu da $g \circ f$ nin I aralığında azalan olması demektir.

2. (a) He $x \in \mathbb{R}$ için $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ ve $x < \frac{-1}{2}$ için $2|x|-1 = -2x-1 > 0$ olur ve dolayısıyla ($x < -\frac{1}{2}$ için) $\frac{x-1}{-2x-1} < \frac{\lfloor x \rfloor}{2|x|-1} \leq \frac{x}{-2x-1}$ olur. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-2x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-2-\frac{1}{x}} = \frac{-1}{2}$ ve $\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{-2x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{-2-\frac{1}{x}} = \frac{-1}{2}$ olduğundan Sıkıştırma (Sandviç) Teoreminden $\lim_{x\to-\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{2|x|-1} = -\frac{1}{2}$ olur.

   (b) $$\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x^2-6x+5} = \frac{(\sqrt{2x-1}-3)(\sqrt{2x-1}+3)}{(x^2-6x+5)(\sqrt{2x-1}+3)} = \frac{2x-1-9}{(x-5)(x-1)(\sqrt{2x-1}+3)}$$
   $$= \frac{2(x-5)}{(x-5)(x-1)(\sqrt{2x-1}+3)} = \frac{2}{(x-1)(\sqrt{2x-1}+3))}$$ ($x \neq 5$ için) olduğundan
   $$\lim_{x\to5} \frac{\sqrt{2x-1}-3}{x^2-6x+5} = \lim_{x\to5} \frac{2}{(x-1)(\sqrt{2x-1}+3)} = \frac{1}{12}$$ olur.

3. (a) $(-\infty, 1)$ aralığında $\frac{1}{x-1}$ sürekli ve tamsayılar dışında $\lfloor\ \rfloor$ sürekli ve $x \geq 1$ için $\lfloor x \rfloor \neq 0$ olduğundan $f(x)$ bu aralıkta 1 ve 2 dışında süreklidir. $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0}$ olduğundan sonsuz olabilir. $\lim_{x\to1^-}(x-1) = 0$ ve $x < 1$ için $\frac{1}{x-1} < 0$ olduğundan $\lim_{x\to1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ olur. f, 1 de sonsuz tipi süreksizliğe sahiptir. ($x \in (2,3)$ için $\lfloor x \rfloor = 2$ olduğundan) $\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} \frac{\sin x}{2} = \frac{1}{2}\sin 2$ ve ($x \in (1,2)$ için $\lfloor x \rfloor = 1$ olduğundan) $\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \sin x = \sin 2$ olur. Bu nedenle $\lim_{x\to2^+} f(x)$ ve $\lim_{x\to2^-} f(x)$ var ama ($0 < 2 < \pi$ olması nedeniyle $\sin 2 \neq 0$ oluşundan) farklı olur. f, 2 de sıçrama tipi süreksizliğe sahiptir.

   (b) $\varepsilon > 0$ verilsin.
   $$|x-0| < \delta \text{ ve } x \in D_f = [0, +\infty) \text{ iken } |\sqrt[4]{x} - 0| < \varepsilon$$
   o.ş. bir $\delta > 0$ bulmalıyız.
   ($|x-0| < \delta$ ve $x \in D_f = [0, +\infty)$ için) $|\sqrt[4]{x} - 0| = \sqrt[4]{|x|} < \sqrt[4]{\delta}$ olur. $\sqrt[4]{\delta} = \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ seçmemiz yeterlidir. $\delta = \varepsilon^4$ alınırsa, $\delta > 0$ olduğu ve istenen koşulu sağladığı yukarıdaki eşitlik ve eşitsizliklerden görülmektedir.

4. (a) $f(x) = \cot^2 x - x,\ \lambda = 0$ olsun. $f,\ (0, \pi)$ aralığında süreklidir. $f(\frac{\pi}{6}) = 3 - \frac{\pi}{6} > \lambda$ ve $f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < \lambda$ olur. ($[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}] \subset (0, \pi)$ olduğundan) $f,\ [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ aralığında da süreklidir Ara Değer Teoreminden $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ aralığında bir c için $f(c) = \lambda = 0$ olur. Yani $\cot^2 c = c$ olur.

(b) Türev alma kuralları denen teoremler kullanılarak

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\sin\frac{x}{x^2+1}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \cos\frac{x}{x^2+1} \cdot \frac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot(2x)}{(x^2+1)^2}$$

5. (a) $57°$, $\frac{57\pi}{180} = \frac{19\pi}{60}$ radyandır. $f(x) = \cos x,\ b = \frac{19\pi}{60},\ a = \frac{\pi}{3}$ olsun. Diferansiyel yardımı ile yaklaşık hesap formülünde $(f(b) \approx f(a) + f'(a)(b-a))$ yerine konursa $\cos 57° = \cos\frac{19\pi}{60} \approx \frac{1}{2} + (-\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot(-\frac{\pi}{60}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{120}$ bulunur.

(b) Kapalı türev alma yöntemi ile:

$$\cos(xy)\cdot(y + xy') + \frac{1\cdot(x+y^2) - x\cdot(1+2yy')}{(x+2y)^2} = 0$$

Bu eşitlikten y' çözülürse,

$$y' = \frac{-y\cos(xy) - \frac{y^2}{(x+y^2)^2}}{x\cos(xy) - \frac{2xy}{(x+y^2)^2}} = \frac{y^2 + y(x+y^2)^2\cos(xy)}{2xy - x(x+y^2)^2\cos(xy)}$$

elde edilir.