MT 131 I. ARA SINAV (8 Kasım 2010) ÇÖZÜMLER

1. $x_1 < x_2,\ x_1, x_2 \in (-a, 0]$ olsun. $-x_1 > -x_2,\ -x_1, -x_2 \in [0, a)$ olur. $f,\ [0, a)$ aralığında kesin artan olduğundan $f(-x_1) > f(-x_2)$ olur. f tek fonksiyon olduğundan $f(-x_1) = -f(x_1)$ ve $f(-x_2) = -f(x_2)$ olur, dolayısıyla $-f(x_1) > -f(x_2)$ elde edilir. Her iki taraf -1 ile çarpılarak $f(x_1) < f(x_2)$ elde edilir.

2. $R_f = \{y \in \mathbb{R} :$ en az bir $x \in D_f$ için $y = \frac{x+3}{x^2-2}\}$ dir. $y = \frac{x+3}{x^2-2}$ denklemi ile $y(x^2-2) = x+3$ denklemi ile eşdeğerdir. $yx^2 - x - 2y - 3 = 0$ denkleminin gerçel çözümü olması için gerek ve yeter koşul ($y = 0$ için de çözüm vardır)
$\Delta = (-1)^2 - 4y(-2y-3) = 8y^2 + 12y + 1 \geq 0$ olmasıdır. $8y^2 + 12y + 1$ nin kökleri $\frac{-3\pm\sqrt{7}}{4}$ olduğundan $8y^2 + 12y + 1 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $(-\infty, \frac{-3-\sqrt{7}}{4}] \bigcup [\frac{-3+\sqrt{7}}{4}, +\infty)$ yani $R_f = (-\infty, \frac{-3-\sqrt{7}}{4}] \bigcup [\frac{-3+\sqrt{7}}{4}, +\infty)$ bulunur.

3. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} 2x = 4$ olur. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{\sin(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-2}{\sin(x-2)}(x+2)$ dir. $t = x-2$ değişken değişikliği ile ($x \neq 2$ için $t \neq 0$ ve $\lim_{x\to 2}(x-2) = 0$ olduğundan) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sin(x-2)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\sin t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{\frac{\sin t}{t}} = 1$ olur. Değişken Değişikliği teoreminden $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sin(x-2)} = 1$ olur.(tek/çift taraflı limit ilişkisi teoreminden) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-2}{\sin(x-2)} = 1$ olur. (Tek taraflı Limitler için) Limit teoreminden $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{\sin(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-2}{\sin(x-2)} \lim\limits_{x\to 2^-}(x+2) = 4$ bulunur. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$ olduğundan $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ olur.

4. Her $x \in \mathbb{R}$ için $x^2 - 1 \leq \lfloor x^2 \rfloor \leq x^2$ ve $2x^2 \leq \lfloor 2x^2 + 1 \rfloor \leq 2x^2 + 1$ olur. Dolayısıyla her $x > 0$ için

$$\frac{x^2-1}{2x^2+1} \leq \frac{\lfloor x^2 \rfloor}{\lfloor 2x^2+1 \rfloor} \leq \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

sağlanır. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{2}$ ve $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ olduğundan Sandviç (Sıkıştırma) teoreminden $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lfloor x^2 \rfloor}{\lfloor 2x^2+1 \rfloor} = \dfrac{1}{2}$ olur.

5. $$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x\to 8} \frac{(\sqrt{x+1}-3)(\sqrt{x+1}+3)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt{x+1}+3)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}$$
$$= \lim_{x\to 8} \frac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)} = \lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{x+1}+3} = \frac{12}{6} = 2$$

6. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ tanımından,
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ ve a yı içeren bir I_1 açık aralığında (belki a hariç) $f(x) > 0$ olur.
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ tanımından,
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = 0$ ve a yı içeren bir I_2 açık aralığında (belki a hariç) $g(x) < 0$ olur.
(a yı içeren) $I = I_1 \bigcap I_2$ açık aralığında (belki a hariç) $f(x)g(x) < 0$ olur ve
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = 0 \cdot 0 = 0$ olur. Dolayısıyla $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = -\infty$ olur.

7. $f(x) = \tan x - \sqrt{x+1}$ ve $\lambda = 0$ olsun. $f(0) = -1 < \lambda$ olur. $f(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} - \sqrt{\frac{\pi}{3}+1}$ olur. $\pi < 4$ olduğundan $\frac{\pi}{3}+1 < \frac{7}{3} < 3$, $\sqrt{\frac{\pi}{3}+1} < \sqrt{3}$, dolayısıyla $f(\frac{\pi}{3}) > 0 = \lambda$ olur. $[0, \frac{\pi}{3}] \subset [-1, \frac{\pi}{2}) \subset D_f$ ve f sürekli fonksiyon olduğundan f, $[0, \frac{\pi}{3}]$ aralığında süreklidir. Ara Değer teoreminden, $(0, \frac{\pi}{3})$ aralığında $f(c) = \lambda = 0$ olacak şekilde en az bir c sayısı vardır. Bu c için $\tan c = \sqrt{c+1}$ doğru olur.

8. Süreklilik Teoremlerinden f, 0 ve -1 dışında her yerde süreklidir.

   (a) $a = 0$ için:
   $(-\infty, 1)$ aralığında, 0 hariç, $x^2 - x \neq 0$ olur ve $\lim_{x\to 0} x^2 - x = 0$, $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ ve olduğundan Limit için Değişken Değiştirme Teoreminden $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2-x)}{x^2-x} = 1$ olur.
   Dolayısıyla $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2-x)}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2-x)}{x^2-x}\dfrac{x-1}{x+1} = 1\cdot(-1) = -1$,
   f, $a = 0$ da tanımsız olduğundan süreksizdir. $\lim_{x\to 0} f(x)$ limiti var olduğundan bu süreksizlik, kaldırılabilir tip süreksizliktir.

   (b) $a = -1$ için:
   $(-1, 0)$ aralığında $0 < x^2 - x < \pi$ olduğundan $\sin(x^2-x) > 0$, $x^2 + x = x(x+1) < 0$ olur.
   Dolayısıyla $(-1, 0)$ aralığında $f(x) < 0$ ve $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^2+x}{\sin(x^2-x)} = \dfrac{0}{\sin 2} = 0$ olduğundan $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ olur, f, $a = -1$ de sonsuz tipi süreksizliğe sahiptir. ($\lim\limits_{x\to -1}(x^2-x) = 2$, ve sin, 2 de sürekli olduğundan Bileşkenin limiti teoreminden $\lim\limits_{x\to -1} \sin(x^2-x) = \sin 2$ olur. Tek/çift taraflı limit ilişkisi Teoreminden $\lim\limits_{x\to -1^+} \sin(x^2-x) = \sin 2$ olur. $0 < 2 < \pi$ olduğundan $\sin 2 \neq 0$ dır.)

9. Süreklilik tanımı: f, bir fonksiyon ve $a \in D_f$ olsun.
   Her $\varepsilon > 0$ için
   $|x-a| < \delta$ (ve $x \in D_f$) iken $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$
   olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulunabiliyorsa
   f, a de süreklidir deriz.
   $\varepsilon > 0$ verilsin.
   $|f(x) - f(2)| = |\sqrt[3]{(x-2)^2} - 0| = \sqrt[3]{|x-2|^2} < \sqrt[3]{\delta^2} = \varepsilon$
   $\sqrt[3]{\delta^2} = \varepsilon$ yani $\delta = \varepsilon^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\varepsilon^3}$ seçmek yeterlidir.

10. $$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{(x+\Delta x)^2+1} - \sqrt{x^2+1}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\sqrt{(x+\Delta x)^2+1} - \sqrt{x^2+1})(\sqrt{(x+\Delta x)^2+1} + \sqrt{x^2+1})}{\Delta x\ (\sqrt{(x+\Delta x)^2+1} + \sqrt{x^2+1})}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^2+1-(x^2+1)}{\Delta x\ (\sqrt{(x+\Delta x)^2+1} + \sqrt{x^2+1})} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x\ (\sqrt{(x+\Delta x)^2+1} + \sqrt{x^2+1})}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2x + \Delta x}{\sqrt{(x+\Delta x)^2+1} + \sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$