MT 131
2012 ARA SINAV ÇÖZÜMLER

1. (a) $R_f = \{y \in \mathbb{R} : \text{en az bir } x \text{ için } y = \frac{x^2+1}{x^2-4}\}$
$= \{y \in \mathbb{R} : y(x^2-4) = x^2+1 \text{ denkleminin } (x \text{ için}) \text{ en az bir gerçel çözümü vardır } \}$
$= \{y \in \mathbb{R} : (y-1)x^2 = (4y+1) \text{ denkleminin } (x \text{ için}) \text{ en az bir gerçel çözümü vardır } \}$
$= \{y \in \mathbb{R} : x^2 = \frac{4y+1}{y-1} \text{denkleminin } (x \text{ için}) \text{ en az bir gerçel çözümü vardır } \}$
$= \{y \in \mathbb{R} : \frac{4y+1}{y-1} \geq 0\} = (-\infty, -\frac{1}{4}] \cup (1, +\infty)$

(b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}+1}{\sqrt[3]{x^2-10}+1}$ için
$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \geq 0,\ \sqrt[3]{x^2-10} \neq -1\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \geq 0,\ x^2 - 10 \neq -1\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \geq 0,\ x^2 \neq 9\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : (x-2)(x+2) \geq 0,\ x \neq \pm 3\}$
$= (-\infty, -3) \cup (-3, -2] \cup [2, 3) \cup (3, +\infty)$

2. (a) $$\lim_{x\to 13} \frac{\sqrt[3]{2x+1}-3}{\sqrt{x-4}-3} = \lim_{x\to 13} \frac{(\sqrt[3]{2x+1}-3)(\sqrt[3]{(2x+1)^2}+3\sqrt[3]{2x+1}+9)(\sqrt{x-4}+3)}{(\sqrt{x-4}-3)(\sqrt{x-4}+3)(\sqrt[3]{(2x+1)^2}+3\sqrt[3]{2x+1}+9)}$$
$$= \lim_{x\to 13} \frac{(2x-26)(\sqrt{x-4}+3)}{(x-13)(\sqrt[3]{(2x+1)^2}+3\sqrt[3]{2x+1}+9)}$$
$$= \lim_{x\to 13} \frac{2(\sqrt{x-4}+3)}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}+3\sqrt[3]{2x+1}+9} \overset{\textit{Limit Teoremlerinden}}{=} \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$$

(b) $|\cos(x^3)| \leq 1$ ve $\sqrt{x^2+1} > |x|$ olduğundan, her $x > 0$ için, $-\dfrac{1}{x} < \dfrac{\cos(x^3)}{\sqrt{x^2+1}} < \dfrac{1}{x}$
olur. Kuvvet fonksiyonları için sonsuzda limit teoreminden (veya $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{t\to 0^+} t = 0$
oluşundan) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ olur. Limit Teoreminden $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$ olur. Sandviç (Sıkıştırma) Teoreminden
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x^3)}{\sqrt{x^2+1}} = 0$ elde edilir.

3. (a) Soruda belirtilen eşitsizlikten, her $x \in \mathbb{R}$ için $1 \geq \cos(x^2) \geq 1 - x^4$ olur.
Buradan, her $x \in \mathbb{R}$ için, $|\cos(x^2) - 1| \leq x^4$ elde edilir.
$\varepsilon > 0$ verilsin.
$$|x - 0| < \delta \text{ iken } |\cos(x^2) - 1| < \varepsilon$$
olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulmalıyız.
$$|\cos(x^2) - 1| \leq x^4 = |x|^4 < \delta^4 = \varepsilon$$
$\delta = \sqrt[4]{\varepsilon}$ seçmek yeterlidir. $\delta > 0$ olduğu aşikardır ve bu sayının istenen koşulun sağlandığı yukarıda gösterilmiştir.

(b) $$\lim_{x\to\pi} \frac{(x-\pi)^2}{1+\cos x} = \lim_{x\to\pi} \frac{(x-\pi)^2(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{(x-\pi)^2}{\sin^2 x}(1-\cos x) \text{ olur.}$$
$\sin^2 x = (-\sin(x-\pi))^2 = \sin^2(x-\pi)$ dir. ($t = x - \pi$ olmak üzere)
$\lim_{x\to\pi} t = 0$
$x \neq \pi$ için $t \neq 0$ ve
$\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin^2 t}{t^2} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = 1^2 = 1$ olduğundan Limit için Değişken Değiştirme

Teoremini kullanarak $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{(x-\pi)^2}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{(x-\pi)^2}{\sin^2(x-\pi)} = 1$ bulunur. Limit Teoreminden:
$\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{(x-\pi)^2}{1+\cos x} = \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{(x-\pi)^2}{\sin^2 x} \lim\limits_{x\to\pi}(1-\cos x) = 1 \cdot 2 = 2$ bulunur.

4. (a) $f(x) = x^2 - \cos x$, $\lambda = 0$ olsun. Denklemin çözümleri, f nin kökleri ile aynıdır. Derste ispatlanan Teoremlerden, f tüm $\mathbb{R}$ de (dolayısıyla her aralıkta) süreklidir. $f(0) = -1 < \lambda$, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} > \lambda$ olduğundan ve f, $[0, \frac{\pi}{2}]$ aralığında sürekli olduğundan, Ara Değer Teoreminden, $f(c) = \lambda = 0$ olacak şekilde en az bir $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ vardır. f çift fonksiyon olduğu için $f(-c) = 0$ olur. $c > 0$ olduğundan $c \neq -c$ olur. Dolayısıyla f nin (en az) iki farklı kökü, $x^2 = \cos x$ denkleminin (en az) iki çözümü vardır.

   (b) i. $a = 0$ olsun. $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ için $f(x) = \frac{-1}{x}$ olduğundan, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{1}{x} = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{1} = 0$ ve her $x < 0$ için $-\frac{1}{x} > 0$ olduğundan). f, 0 da sonsuz tipi süreksizliğe sahiptir.

   ii. $a = \frac{\pi}{2}$ olsun. $x \in (0,\pi), x \neq \frac{\pi}{2}$ için $f(x) = 0$ olduğundan $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 0$ olur. Diğer taraftan $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi} \neq 0$ olduğundan, f, $\frac{\pi}{2}$ de kaldırılabilir tip süreksizliğe sahiptir.

   iii. $a = \pi$ olsun. $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ için $f(x) = 0$ olduğundan $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi^-} 0 = 0$ olur.
   $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ için $f(x) = -\frac{1}{x}$ olduğundan $\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi^+} -\dfrac{1}{x} = \dfrac{-1}{\pi}$ olur. (Her iki limit de var ve) $\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)$ olduğundan, f, π de sıçrama tipi süreksizliğe sahiptir.

5. (a) $f'(0)$:
$(0,1)$ aralığında $f(x) = 0$ olduğundan:
$f'(0+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{0-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} 0 = 0$ olur.
$(-\infty, 0)$ aralığında $f(x) = x^3$ olduğundan:
$f'(0-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h^3-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} h^2 = 0$ olur.
Burada da $f'(0) = 0$ elde edilir.

$f'(\sqrt{2})$:
$(0 \in (1-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$ ve her $h \in (1-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$ için $1 < \sqrt{2}+h < 2$ olur ve $f(\sqrt{2}+h) = 1$ olduğundan $(f(\sqrt{2}+h) - f(\sqrt{2}) = 0$ olur):
$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(\sqrt{2}+h) - f(\sqrt{2})}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0$ olur.

   (b) $f'(a) > 0$ varsayalım. $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$ olduğundan, ilk limit teoremlerimizin birinden, a yı içeren bir açık aralıktaki
(belki a hariç), her x için, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$ olmak zorundadır. Bu aralıkta bir $b > a$ alalım.
$f(b) - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) > 0$ olur. Bu, $f(b) > f(a)$ olması demektir. $a, b \in [a, +\infty)$, $a < b$ ve f nin $[a, +\infty)$ aralığında azalan olduğundan $f(a) \geq f(b)$ olmalıdır. Çelişki.
Öyleyse $f'(a) \leq 0$ olmalıdır.