MT 131 ANALİZ (2014) ARA SINAV ÇÖZÜMLER

1. (a) $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt[3]{x-1}}$ için:

$$\begin{aligned} D_f &= \{x\in\mathbb{R}: 4-x^2\geq 0,\ \sqrt[3]{x-1}\neq 0\} = \{x\in\mathbb{R}: 4-x^2\geq 0,\ x\neq 1\} \\ &= \{x\in\mathbb{R}: x^2\leq 4\}\cap\{x\in\mathbb{R}: x\neq 1\} = [-2,+2]\cap(\mathbb{R}\setminus\{1\}) = [-2,1)\cup(1,2] \end{aligned}$$

(b) $g(x)=\frac{x^2-4}{x+1}$ için:

$$\begin{aligned} R_g &= \{y\in\mathbb{R}: y=g(x) \text{ olacak şekilde en az bir } x \text{ vardır}\} = \{y\in\mathbb{R}: y=\tfrac{x^2-4}{x+1} \text{ o. ş. en az bir } x \text{ vardır}\} \\ &= \{y\in\mathbb{R}: x^2-yx-(y+4)=0 \text{ o. ş. en az bir } x \text{ vardır}\} = \{y\in\mathbb{R}: (-y)^2-4\cdot 1\cdot(-y-4)\geq 0\} \\ &= \{y\in\mathbb{R}: y^2+4y+16\geq 0\} = \{y\in\mathbb{R}: (y+2)^2+12\geq 0\} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. (a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt[3]{x}-1}$ limitinde $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt[3]{x}-1} &= \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{(x-1)\,(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)\,(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x+3}+2} \quad (x\neq 1) \end{aligned}$$

olduğu için, limitin (temel) özelliğinden:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x+3}+2}$$

olur. Limit teoremlerinden

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{3}{4}$$

olduğundan $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt[3]{x}-1}=\dfrac{3}{4}$ bulunur.

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+x+1})$ limitinde $\infty-\infty$ belirsizliği vardır.

$$x+\sqrt{x^2+x+1} = \frac{(x+\sqrt{x^2+x+1})(x-\sqrt{x^2+x+1})}{x-\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{x^2-(x^2+x+1)}{x-\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \frac{-x-1}{x-\left(\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)} = \frac{-x-1}{x-\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)} \overset{x\to-\infty \text{ olduğundan}}{\underset{x<0 \text{ varsayabiliriz}}{=}} \frac{-x-1}{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{\cancel{x}\,(-1-\frac{1}{x})}{\cancel{x}\,(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}})} = \frac{-1-\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

olur. Limit teoremlerinden: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+x+1}) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1-\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \dfrac{-1}{2}$ buluruz.

İkinci Çözüm:

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+x+1}) = \lim_{t\to 0^-}\left(\frac{1}{t}+\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{1}{t}+1}\right) = \lim_{t\to 0^-}\left(\frac{1}{t}+\sqrt{\frac{1+t+t^2}{t^2}}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0^-}\left(\frac{1}{t}+\frac{\sqrt{1+t+t^2}}{\sqrt{t^2}}\right) \overset{t<0}{\underset{\text{olduğu için}}{=}} \lim_{t\to 0^-}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t}\sqrt{1+t+t^2}\right) = \lim_{t\to 0^-}\frac{1-\sqrt{1+t+t^2}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^-}\frac{(1-\sqrt{1+t+t^2})(1+\sqrt{1+t+t^2})}{t(1+\sqrt{1+t+t^2})} = \lim_{t\to 0^-}\frac{1-(1+t+t^2)}{t(1+\sqrt{1+t+t^2})} = \lim_{t\to 0^-}\frac{-t-t^2}{t(1+\sqrt{1+t+t^2})}$$

$$= \lim_{t\to 0^-}\frac{-1-t}{1+\sqrt{1+t+t^2}} = \frac{-1}{2}$$

3. (a) Bir $\varepsilon > 0$ verilsin.
$|x-0| < \delta$ ve $x \in D_f$ iken $|\sqrt[4]{x} - 0| < \varepsilon$ o. ş. (ε a bağlı) bir $\delta > 0$ sayısı bulmalıyız.
$D_f = [0, +\infty)$ olduğu aşikardır. $|x-0| < \delta$ ve $x \geq 0$ iken $|\sqrt[4]{x} - 0| = \sqrt[4]{|x|} < \sqrt[4]{\delta}$ olur. Dolayısıyla $\sqrt[4]{\delta} = \varepsilon$ yani $\delta = \varepsilon^4$ olarak seçersek, $\delta > 0$ olur ve yukarıda gösterildiği gibi:
$|x-0| < \delta$ ve $x \in D_f$ iken $|\sqrt[4]{x} - 0| < \varepsilon$ olur.

(b) Her $x \in (-\pi, \pi)$, $x \neq 0$ için $\frac{\sin(2\sin x)}{x} = \frac{\sin(2\sin x)}{2\sin x}\, 2\, \frac{\sin x}{x}$ olduğundan, Limitin (temel) özelliğinden:
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2\sin x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2\sin x)}{2\sin x}\, 2\, \dfrac{\sin x}{x}$ olur. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2\sin x)}{2\sin x}$ limitinde $t = 2\sin x$ değişken değişikliği yapalım.

i. $\lim\limits_{x\to 0} 2\sin x = 0$ ($\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ problemi ve teoremler)
ii. $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $x \neq 0$ için $2\sin x \neq 0$ olur.
iii. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ dir (Teorem)

(Limitler için) Değişken Değiştirme Teoreminden $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2\sin x)}{2\sin x} = 1$ bulunur. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (Teorem) olduğundan (Limit teoremi ve sabitin limiti teoreminden):
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2\sin x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2\sin x)}{2\sin x}\, 2\, \dfrac{\sin x}{x} = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$ bulunur.

4. (a) $f(x) = x^2 + \sin x - 1$ olsun. f her yerde tanımlıdır (yani $D_f = \mathbb{R}$ dir) ve süreklilik ile ilgili teoremlerimizden, f sürekli fonksiyondur. $\lambda = 0$ alalım. $f(0) = -1 < \lambda$ ve $f(2) = 3 + \sin 2$ olur ($\sin 2 \geq -1$ olduğundan) $f(2) > \lambda$ olur. f sürekli fonksiyon ve $[0,2] \subseteq D_f = \mathbb{R}$ olduğundan, f, $[0,2]$ aralığında süreklidir. Ara Değer teoreminden $f(c) = \lambda$, yani $c^2 + \sin c - 1 = 0$ olacak şeklinde (en az) bir $c \in [0,2]$ sayısı vardır. Bu sayı verilen denklemin bir çözümüdür.

(b) Her $x \in \mathbb{R}$ için $-1 \leq \cos x \leq 1$ olduğunu biliyoruz. Öyleyse her $x > 0$ için $\dfrac{-1}{x} \leq \dfrac{\cos x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$ olur. (Sonsuzdaki limitlerle ilgili teoremimizden) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ ve Limit teoreminden $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-1}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} (-1)\, \dfrac{1}{x} = 0$ olur. Sandviç (Sıkıştırma) Teoreminden $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cos x}{x} = 0$ elde ederiz.

5. (a) $a = 0$ olsun. $-1 < x < 0$ için $\frac{\lfloor x \rfloor}{x} = \frac{-1}{x}$ olduğu için, soldan limitlerin (temel) özelliğinden:
$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-1}{x}$ olur.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{-1} = \dfrac{0}{-1} = 0$
- $x < 0$ için $\frac{-1}{x} > 0$

olduğundan, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-1}{x} = +\infty$, dolayısıyla $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ olur.
Bu nedenle, f, $a = 0$ da sonsuz tipi süreksizliğe sahiptir.

(b) $b = 1$ olsun.
$0 < x < 1$ için $f(x) = 0$ olduğundan, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 0 = 0$ olur.
$1 < x < 2$ için $f(x) = \frac{1}{x}$ olduğundan, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x} = 1$ olur.
Sağdan ve soldan limitler sonlu ama farklı olduğundan, f, $b = 1$ de sıçrama tipi süreksizliğe sahiptir.