MT 131 ANALİZ I ARA SINAV 2015 Çözümler

1. (a) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+5}}{\sqrt{x^2-2x}-2}$ için:

$$\begin{aligned} T(f) &= \{x \in \mathbb{R} : x^2-2x \geq 0,\ \sqrt{x^2-2x}-2 \neq 0\} = ((-\infty,0]\cup[2,+\infty)) \setminus \{x\in\mathbb{R} : \sqrt{x^2-2x}=2\} \\ &= ((-\infty,0]\cup[2,+\infty)) \setminus \{1\pm\sqrt{5}\} = \left(-\infty, 1-\sqrt{5}\right) \cup \left(1-\sqrt{5}, 0\right] \cup \left[2, 1+\sqrt{5}\right) \cup \left(1+\sqrt{5}, +\infty\right) \end{aligned}$$

(b) $g(x) = \dfrac{x^2+3}{x}$ için

$$\begin{aligned} \text{Gör}(g) &= \{y\in\mathbb{R} : y = \frac{x^2+3}{x} \text{ o. ş. en az bir } x \neq 0 \text{ gerçel sayısı vardır}\} \\ &= \{y\in\mathbb{R} : xy = x^2+3 \text{ o.ş. en az bir } x\neq 0 \text{ gerçel sayısı vardır}\} \\ &= \{y\in\mathbb{R} : x^2-xy+3=0 \text{ denkleminin } (x \text{ bilinmeyeni için) en az bir gerçel çözümü vardır}\} \\ &= \{y\in\mathbb{R} : \Delta = y^2-12 \geq 0\} = \left(-\infty, -2\sqrt{3}\right] \cup \left[2\sqrt{3}, +\infty\right) \end{aligned}$$

2. (a) $\frac{0}{0}$ belirsizliği var. Birinci Çözüm:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{x+5}-2}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt[3]{x+5}-2)(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt{x+1}+4)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt{x+1}+4)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt{x+1}+4)} \overset{*}{=} \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt{x+1}+4} \overset{**}{=} \frac{2+2}{4+4+4} = \frac{1}{3}$$

*: Limitin "Temel Özelliği" nden. **: Limit Teoremlerinden

(b) $\infty - \infty$ belirsizliği var.

$$\lim_{x\to+\infty}(2x-\sqrt{x^2+4x+1}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x-\sqrt{x^2+4x+1})(2x+\sqrt{x^2+4x+1})}{2x+\sqrt{x^2+4x+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-4x-1}{2x+\sqrt{x^2+4x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-4x-1}{2x+\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-4x-1}{2x+|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$(* : x \to +\infty$ olduğu için $x > 0$ varsayabiliriz. bu nedenle $|x| = x$ olur.)

$$\overset{*}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x(3x-4-\frac{1}{x})}{x\left(2+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-4-\frac{1}{x}}{2+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}} \overset{**}{=} \frac{3(+\infty)-4-0}{2+\sqrt{1+0+0}} = +\infty$$

**: Limit Teoremlerinden

İkinci Çözüm:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}(2x-\sqrt{x^2+4x+1}) &= \lim_{x\to+\infty}\left(2x-|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) \overset{*}{=} \lim_{x\to+\infty} x\left(2-\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) \\ &\overset{**}{=} +\infty(2-\sqrt{1+0+0}) = +\infty \end{aligned}$$

3. (a) $\varepsilon > 0$ verilsin.

$0 < |x - 0| < \delta$ iken $|\sin(x^2)| < \varepsilon$ o.ş. (ε a bağlı) bir $\delta > 0$ bulmalıyız.

$|\sin(x^2) - 0| = |\sin(x^2)| \overset{*}{\leq} |x^2| = |x|^2 \overset{**}{<} \delta^2 = \varepsilon$ olduğundan, $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ seçmek yeterlidir ($\varepsilon > 0$ olduğundan $\delta > 0$ olur, δ nın istenen özelliğe sahip olduğu yukarıda gösterilmiştir.).

(*: Sınıfta her $x \in \mathbb{R}$ için $|\sin x| \leq |x|$ olduğu gösterildi. **: $|x - 0| < \delta$ iken)

(b)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(x-\frac{\pi}{2})\cos x}{1-\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(x-\frac{\pi}{2})\cos x(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(x-\frac{\pi}{2})\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(x-\frac{\pi}{2})(1+\sin x)}{\cos x} \overset{*}{=} \lim_{t\to 0} \frac{t(1+\sin(t+\frac{\pi}{2}))}{\cos(t+\frac{\pi}{2})} = \lim_{t\to 0} \frac{t(1+\cos t)}{-\sin t} = \lim_{t\to 0} \frac{-1}{\frac{\sin t}{t}}(1+\cos t) \overset{**}{=} -2$$

*: Aşağıdaki koşullar sağlandığı için olduğu için ($t = x - \frac{\pi}{2}$ olmak üzere) Limitlerde Değişken Değişikliği Teoremini kullanabiliriz

i) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ ve ii) $x \neq \frac{\pi}{2}$ için $x - \frac{\pi}{2} \neq 0$.

**: Limit Teoremlerinden

4. (a) $f(x) = x^5 + \tan x,\ \lambda = 1$ olsun. Teoremlerden, f sürekli bir fonksiyondur. $f(0) = 0 < \lambda$ ve ($\pi > 0$ olduğu için) $f(\frac{\pi}{4}) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^5 + 1 > 1 = \lambda$ dir. $[0, \frac{\pi}{4}] \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \subset T(f)$ ve f sürekli fonksiyon olduğu için, f, $[0, \frac{\pi}{4}]$ aralığında süreklidir. $f(0) = 0 < \lambda = 1 < f(\frac{\pi}{4})$ olduğu için, Ara Değer Teoreminden, $f(c) = 1 = \lambda$ olacak şekilde en az bir $c \in (0, \frac{\pi}{4})$ vardır. Bu sayı, denklemimizin bir çözümüdür.

(b) Her $x \in \mathbb{R}$ için, $-1 \leq \sin x \leq 1$ olduğu için her $x > 1$ için, $x^2 + 1 \geq x^2 + \sin x > 0$ ve $0 < x^2 - 1 \leq x^2 + \sin x$ olduğu için (her $x > 1$ için) $\frac{x-1}{x^2+1} \leq \frac{x-1}{x^2+\sin x} \leq \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$ olur. Limit Teoremlerinden, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0$ ve $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{+\infty+1} = 0$ dir. Sıkıştırma (Sandviç) Teoreminden $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2+\sin x} = 0$ olur.

5. $f(x) = \begin{cases} ax^2 & x > 1 \\ x + b & x \leq 1 \end{cases}$ için $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} ax^2 = a,\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} bx + 1 = b + 1$ olduğu için (Tek/Çift Taraflı Limit ilişkisi Teoremi ve Süreklilik için limit kriterinden) $a = b+1$ olması, f nin 1 de sürekli olması için gerekli ve yeterlidir. Bu durumda, $f'(1+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{ax^2-a}{x-1} = 2a$, $f'(1-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{bx+1-(b+1)}{x-1} = 1$ olur. f nin 1 de türevlenebilmesi için $2a = 1$ olması gerekli ve yeterlidir. $a = b + 1,\ 2a = 1$ sisteminin tek çözümünün $a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2}$ olduğu aşikardır.