

$$\begin{aligned}
 1. \quad T(f) &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x \geq 0, x \geq 0, \sqrt{x^2 - x} - 2\sqrt{x} \neq 0\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} : x(x - 1) \geq 0, x \geq 0\} \setminus \{x : \sqrt{x^2 - x} = 2\sqrt{x}\} \\
 &= \{x : x(x - 1) \geq 0\} \cap \{x : x \geq 0\} \setminus \{x : \sqrt{x^2 - x} = 2\sqrt{x}\} \\
 &= (((-\infty, 0] \cup [1, +\infty)) \cap [0, +\infty)) \setminus \{0, 5\} \\
 &= (\{0\} \cup [1, +\infty)) \setminus \{0, 5\} = [1, 5) \cup (5, +\infty)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \text{Gör}(g) &= \{y \in \mathbb{R} : y = \frac{x^2 + 1}{x - 1} \text{ olacak şekilde en az bir } x \in T(f) \text{ vardır}\} \\
 &= \{y \in \mathbb{R} : y(x - 1) = x^2 + 1 \text{ olacak şekilde en az bir } x \in T(f) \text{ vardır}\} \\
 &= \{y \in \mathbb{R} : x^2 - yx + (y + 1) = 0 \text{ olacak şekilde en az bir } x \in \mathbb{R} \text{ vardır}\} \\
 &= \{y \in \mathbb{R} : \Delta = (-y)^2 - 4(y + 1) \geq 0\} = \{y \in \mathbb{R} : y^2 - 4y - 4 \geq 0\} \\
 &= \{y \in \mathbb{R} : (y - 2)^2 - 8 \geq 0\} = (-\infty, 2 - \sqrt{8}] \cup [2 + \sqrt{8}, +\infty)
 \end{aligned}$$

3. $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ olsun. f , I aralığında artan olduğu için $f(x_1) \leq f(x_2)$ olur.
 g , I aralığında azalan olduğu için $g(x_1) \geq g(x_2)$ olur. Buradan, $-g(x_1) \leq -g(x_2)$ olur.
 Bu iki eşitsizlik taraf tarafa toplanarak $f(x_1) - g(x_1) \leq f(x_2) - g(x_2)$ elde edilir.
 Bu da, $(f - g)(x_1) \leq (f - g)(x_2)$ olması demektir.
 Böylece, $f - g$ nin I aralığında artan olduğu gösterilmiş olur.

4. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ olduğu için, sonsuz limit tanımından, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$ ve “ a yakınında” (yani a yı içeren bir açık aralıkta, belki a hariç) $f(x) > 0$ olur.
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ ve $L > 0$ olduğu için 2. (Teorik) Teoremimizden, (“limit pozitif ise fonksiyon da, a yakınında pozitiftir” Teoremi) a yı içeren bir açık aralıkta (belki a hariç) $g(x) > 0$ olur.
 Bu iki açık aralığın arakesiti, a yı içeren bir açık aralıktır ve bu açık aralıkta, belki a dışında $f(x)g(x) > 0$ olur.

Limit Teoreminden ($L \neq 0$ olduğunu da kullanarak), $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)} = \frac{0}{L} = 0$ olur.

Böylece $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = +\infty$ olduğu gösterilmiş olur.

5. Her $x \neq 0$ için $\frac{\sin(x^2 - x)}{x - 1} = \frac{\sin(x^2 - x)}{x^2 - x} x$ dir.

Limitin temel özelliğinden

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin(x^2 - x)}{x^2 - x} x \right) \text{ olur.}$$

$t = x^2 - x$ olmak üzere değişken değişikliği yapacağız.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x) = 0$ (Polinomun Limiti Teoremi)

(b) $x \in (0, +\infty)$, $x \neq 1$ için $x^2 - x \neq 0$

(c) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ (Bu da bir teorem)

olduğu için Limitler için Değişken Değiştirme Teoreminden $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - x)}{x^2 - x} = 1$ olur.

$\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$ (Bu da bir teorem) olduğundan,

Limit Teoreminden: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - x)}{x^2 - x} \lim_{x \rightarrow 1} x = 1 \cdot 1 = 1$ bulunur.

6. Tam Değer fonksiyonunun tanımından, her $x \in \mathbb{R}$ için, $2x < \lfloor 2x + 1 \rfloor \leq 2x + 1$ olduğunu biliyoruz. Her $x > 1$ için ($x^2 - 1 > 0$ olduğu için) $\frac{2x}{x^2 - 1} < \frac{\lfloor 2x + 1 \rfloor}{x^2 - 1} \leq \frac{2x + 1}{x^2 - 1}$ olur. Limit teoremlerinden:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}} = \frac{2 - \frac{1}{+\infty}}{+\infty - \frac{1}{+\infty}} = \frac{2}{+\infty} = 0 \text{ ve } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x - \frac{1}{x}} = \frac{2}{+\infty - \frac{2}{+\infty}} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

olduğu için, Sıkıştırma Teoreminden, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor 2x + 1 \rfloor}{x^2 - 1} = 0$ olur.

7. Her $x \neq 2$ için:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2x+5} - 3}{\sqrt[3]{x+6} - 2} &= \frac{(\sqrt{2x+5} - 3)(\sqrt{2x+5} + 3)(\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2\sqrt[3]{x+6} + 4)}{(\sqrt[3]{x+6} - 2)(\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2\sqrt[3]{x+6} + 4)(\sqrt[3]{x+6} + 2)} \\ &= \frac{2(x-2)(\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2\sqrt[3]{x+6} + 4)}{(x-2)(\sqrt{2x+5} + 3)} = \frac{2(\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2\sqrt[3]{x+6} + 4)}{\sqrt{2x+5} + 3} \end{aligned}$$

olduğu için (İlk eşitlik, Limitin Temel Özelliğinden)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - 3}{\sqrt[3]{x+6} - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2\sqrt[3]{x+6} + 4)}{\sqrt{2x+5} + 3} \stackrel{\text{Limit Teoremleri}}{=} \frac{2(4+4+4)}{3+3} = 4 \text{ olur.}$$

8. $f(x) = \cos x - x^2 + 2$ olsun. Limit konusundaki teoremlerden, $f(x)$ (tüm \mathbb{R} de tanımlı) sürekli bir fonksiyondur. $f(0) = 3 > 0$ ve $f(\pi) = 1 - \pi^2$ dir. $\pi > 3$ olduğu için $f(\pi) < 0$ olur. f , (tüm \mathbb{R} de tanımlı) sürekli bir fonksiyon olduğu için $[0, \pi]$ aralığında süreklidir. $\lambda = 0$ için Ara Değer Teoreminin diğer hipotezi ($f(0) > \lambda$, $f(\pi) < \lambda$) sağlanır. Bu nedenle, Ara Değer Teoreminden, $f(c) = \lambda = 0$ olacak şekilde e az bir $c \in [0, \pi]$ sayısı vardır. Bu sayı, $\cos x = x^2 - 2$ denkleminin bir gerçel çözümüdür.

9. (a) $a = 1$ noktasında soldan limitini bulalım. $0 < x < 1$ için ($0 < x^2 < 1$ olduğundan) $f(x) = \frac{-1}{x-1}$ olur. (tek taraflı limitlerin temel özelliğinden) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) = 0$ ve $0 < x < 1$ için

$$f(x) > 0 \text{ olduğu için } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\lfloor x^2 \rfloor - 1}{x-1} = +\infty \text{ olur. } f, 1 \text{ de sonsuz tipi süreksizliğe sahiptir.}$$

- (b) Her $\sqrt{3} < x < 2$ için $f(x) = \frac{2}{x-1}$ olduğundan (tek taraflı limitlerin temel özelliğinden)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2}{x-1} = 2 \text{ olur.}$$

Her $2 < x < \sqrt{5}$ için $f(x) = \frac{3}{x-1}$ olduğundan (tek taraflı limitlerin temel özelliğinden)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-1} = 3 \text{ olur.}$$

(Her iki limit de var (=sayı) ama) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ olduğunu gösterdik. Bu nedenle f , 2 de sıçrama tipinde bir süreksizliğe sahiptir.