MT 131 ANALİZ I ARA SINAV (2017) ÇÖZÜMLER

1. $T(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 \geq 0,\ 4 - \sqrt{x^2-9} \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (x-3)(x+3) \geq 0,\ \sqrt{x^2-9} \neq 4\}$

   ($(x-3)(x+3) \geq 0$ nin çözüm kümesi $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ ve $\sqrt{x^2-9} = 4 \Leftrightarrow x = \pm 5$ olduğu için)

   $= (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) \setminus \{\pm 5\} = (-\infty, -5) \cup (-5, -3] \cup [3, 5) \cup (5, +\infty)$

2. $\text{Gör}(g) = \left\{ y \in \mathbb{R} : y = \dfrac{x^2+1}{x-2} \text{ olacak şekilde en az bir } x \in T(g) \text{ vardır} \right\}$

   $= \left\{ y \in \mathbb{R} : (x-2)y = x^2 + 1 \text{ olacak şekilde en az bir } x \in \mathbb{R} \text{ vardır} \right\}$

   $= \left\{ y \in \mathbb{R} : x^2 - yx + (1+2y) = 0 \text{ olacak şekilde en az bir } x \in \mathbb{R} \text{ vardır} \right\}$

   $= \left\{ y \in \mathbb{R} : y^2 - 4(1+2y) \geq 0 \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} : y^2 - 8y - 4 \geq 0 \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} : (y-4)^2 \geq 20 \right\}$

   $= (-\infty, 4 - 2\sqrt{5}\,] \cup [\,4 + 2\sqrt{5}, +\infty)$

3. $$\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt{x+8}-3} = \frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)(\sqrt{x+8}+3)}{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x^2+3}+2)(\sqrt{x+8}+3)} = \frac{(x^2-1)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$
   $$= \frac{(x+1)(\sqrt{x+8}+3)}{\sqrt{x^2+3}+2} \quad (x \neq 1 \text{ için})$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt{x+8}-3} \overset{*}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(\sqrt{x+8}+3)}{\sqrt{x^2+3}+2} \overset{**}{=} \frac{2\cdot(3+3)}{2+2} = 3 \qquad \left(\begin{array}{rc} *: & \text{Limitin Temel Özelliği} \\ **: & \text{Limit Teoremleri} \end{array} \right)$$

4. $$\sqrt[3]{x^3+x^2} - x = \frac{(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x)(\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3+x^2} + x^2)}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3+x^2} + x^2} = \frac{x^3+x^2-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3+x^2} + x^2}$$
   $$= \frac{x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x})^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x})^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} + 1} \quad (x \neq 0 \text{ için})$$

   Bu nedenle:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x})^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} + 1} \overset{*}{=} \frac{1}{\sqrt[3]{1^2} + \sqrt[3]{1} + 1} = \frac{1}{3} \quad (*: \text{ Limit Teoremlerinden})$$

5. $3x \leq \lfloor 3x+1 \rfloor \leq 3x+1$ dir. Her $x > \frac{1}{2}$ için $2x - 1 > 0$ olur.

   Bu nedenle (her $x > \dfrac{1}{2}$ için) $\dfrac{3x}{2x-1} \leq \dfrac{\lfloor 3x+1 \rfloor}{2x-1} \leq \dfrac{3x+1}{2x-1}$ olur.

   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2-\frac{1}{x}} = \frac{3}{2}$ ve $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{3}{2}$ olduğundan

   (Sıkıştırma Teoreminden) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor 3x+1 \rfloor}{2x-1} = \frac{3}{2}$ olur.

6. $f(x) = x^3 + 1 - \sin x$ olsun. Süreklilik ile ilgili teoremlerimizden, f, tanım kümesi $\mathbb{R}$ olan sürekli bir fonksiyondur. $\lambda = 0$ olsun. $f(0) = 1$ ve ($\sin 2 \leq 1$ olup) $f(-2) = -7 + \sin 2 \leq -6 < 0$

olur. $[-2,0] \subset \mathbb{R}$ ve f, $\mathbb{R}$ de sürekli olduğu için f, $[-2,0]$ da süreklidir ve $f(-2) < \lambda = 0 < f(0)$ dir. Ara Değer Teoreminden, $f(c) = \lambda = 0$ olacak şekilde (en az) bir $c \in (-2,0)$ vardır. Bu da $c^3 + 1 = \sin c$ olması ile aynı şeydir.

7. $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A = T(f)$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

   $|x - a| < \delta$ ve $x \in A$ olduğunda $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

   olacak şekilde (en az) bir $\delta > 0$ sayısı varsa, f, a noktasında süreklidir deriz.

   $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$(|x-1| < \delta \text{ olduğunda}) \quad |f(x) - f(1)| = |(x-1)^3 - 0| = |x-1|^3 < \delta^3$$

   olur. ($\delta^3 = \varepsilon$ olması için) $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$ seçelim. $\delta > 0$ olur ve $|x-1| < \delta$ (ve $x \in \mathbb{R}$) olduğunda $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$ olduğu yukarıda gösterilmiştir.

8. (a) $a = 0$ olsun. f, 0 da tanımsız olduğu için süreksizdir. $\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $x \neq 0$ için $\lfloor \cos x \rfloor = 0$ olduğundan, $f(x) = 0$ olur. Limitin Temel Özelliğinden, $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$ olur. Bu nedenle, f; 0 da kaldırılabilir süreksizliğe sahiptir.

   (b) $a = \frac{\pi}{2}$ olsun. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ için $-1 < \cos x < 0$ olduğu için, $\lfloor \cos x \rfloor = -1$ ve $f(x) = \frac{-1}{x}$ olur. Sağdan limitin temel özelliğinden,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{-1}{x} = \frac{-2}{\pi} \text{ olur.}$$

   $0 < x < \frac{\pi}{2}$ için $0 < \cos x < 1$ olduğu için, $\lfloor \cos x \rfloor = 0$ ve $f(x) = 0$ olur. Soldan limitin temel özelliğinden,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} 0 = 0 \text{ olur.}$$

   Sağdan ve soldan limitler (sayı olarak) var ama farklı olduğu için f, $\frac{\pi}{2}$ de sıçrama tipi sürekliliğe sahiptir.

9. (a) Sağdan türevi hesaplayalım:

$$f'(1+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sin(x-1)}{x-1}$$

   $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1) = 0$ ve $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ ve $x \neq 1$ için $x - 1 \neq 0$ olduğu için, Limit için Değişken Değiştirme Teoreminden, $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} = 1$ olur. $f'(1+) = 1$ bulunur.

   (b) Soldan türevi hesaplayalım:

$$f'(1-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - x}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x = 1$$

Sağdan ve soldan türevler eşit olduğundan f, 1 de türevlenebilirdir ve $f'(1) = 1$ olur.

10. $f(x)=\sqrt[3]{x},\ a=27,\ b=25$ olsun. $f(a)=\sqrt[3]{27}=3$ ve $f,\ 27$ de türevlenebilirdir.

$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},\ f'(a)=\frac{1}{27}$ olur. Diferansiyel yardımı ile yaklaşık hesap formülünden:

$$\sqrt[3]{25}=f(b)\approx f(a)+f'(a)(b-a)=3+\frac{1}{27}(-2)=\frac{79}{27}\text{ bulunur.}$$