

## MT 241 Analiz 3 Sorular 1

### Tümevarım:

1.  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $5^{2n} - 1$  sayısının 8 ile (kalansız=tam) bölünebildiğini gösterin.
2.  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $2^{n-1} \leq n!$  olduğunu gösterin.
3.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 4$  için  $2^n \leq n!$  olduğunu gösterin.
4.  $k \in \mathbb{N}$  olsun.  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $k^n \leq k^k(n-1)!$  olduğunu gösterin.
5. (Bernoulli Eşitsizliği)  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $x \geq -1$  ve  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $(1+x)^n \geq 1+nx$  olduğunu gösterin.
6.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  için  $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$  olduğunu gösterin.
7. Her  $n \in \mathbb{N}$  ve her  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ,  $a_i \geq 0$  için  $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{2} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$  olduğunu ve eşitliğin sadece  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  iken sağlandığını gösteriniz (Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği).

### Gerçel (Reel) Sayılar:

1.  $A = (-2, 5)$  olsun.  $\sup A = 5$ ,  $\inf A = -2$  olduğunu gösterin.
2.  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$  olsun.  $A$  alttan sınırlı olsun.  $-A = \{-x : x \in A\}$  olarak tanımlayalım.  $-A$  nın üstten sınırlı olduğunu gösterin.  $\inf A = -\sup(-A)$  olduğunu gösterin.
3.  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}$  olsun.  $c + A = \{c + a : a \in A\}$  olarak tanımlayalım.  $A$  üstten (alttan) sınırlı ise  $\sup(c+A) = c + \sup A$  ( $\inf(c+A) = c + \inf A$ ) olduğunu gösterin.
4.  $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$  olsun.  $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$  olarak tanımlayalım.  $A$  ve  $B$  üstten (alttan) sınırlı ise  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$  ( $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ ) olduğunu gösterin.
5.  $\emptyset \neq A, B \subseteq [0, +\infty)$  olsun.  $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$  olarak tanımlayalım.  $A$  ve  $B$  üstten sınırlı ise  $\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B$  olduğunu gösterin.
6.  $A = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$  olsun.  $\sup A$  ve  $\inf A$  yı bulun.
7. Bir kümenin bir üst (alt) sınırı o kümeye ait ise , o üst (alt) sınır supremum (infimum) olur.

8. Lineer sıralı bir kümede her (boş olmayan) sonlu alt kümenin bir maksimumu ve bir minimumu vardır.
9.  $A = \{3 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$  olsun.  $\sup A$  ve  $\inf A$  yı bulunuz (ve tahmininizi ispatlayın).
10.  $A = \{0.7, 0.77, 0.777, \dots\}$  ise  $\sup A$  ve  $\inf A$  yı bulunuz (ve tahmininizi ispatlayın).
11.  $x \in \mathbb{Q}$  ise  $x^2 \neq 2$  olduğunu gösteriniz.
12.  $p$  bir asal sayı olsun.  $x \in \mathbb{Q}$  ise  $x^2 \neq p$  olduğunu gösterin.
13.  $p$  bir asal sayı olsun.  $x \in \mathbb{Q}$  ise  $x^3 \neq p$  olduğunu gösterin.
14.  $p$  bir asal sayı,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$  olsun.  $x \in \mathbb{Q}$  ise  $x^n \neq p$  olduğunu gösterin.