MT 241 Analiz 3 Sorular 2

Yığılma Noktası:

1. $x \in \ A' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $A \cap V_\varepsilon(x)$ sonsuzdur

2. $\emptyset' = \emptyset,\ \mathbb{R}' = \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}^{*\prime} = \mathbb{R}$ olduğunu gösterin.

3. $A, B \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdakileri gösterin:

   (a) $A \subseteq B$ ise $A' \subseteq B'$

   (b) $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$

   (c) $(A \cap B)' \neq A' \cap B'$ olacak şekilde A, B kümeleri bulunuz.

   (d) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

4. Eğer $\forall x \in A$ için $a \leq x \leq b$ (yani $A \subseteq [a, b]$) ise $A' \subseteq [a, b]$ olduğunu gösterin.

5. $A,\ \mathbb{R}$ de yoğundur $\Leftrightarrow \quad A' = \mathbb{R}$

6. $s = \sup A$ ve $s \notin A$ ise $s \in A'$ olduğunu gösterin.

7. $s,\ A$ için bir üst sınır ve $s \in A'$ ise $s = \sup A$ olduğunu gösterin.

8. $s = \inf A$ ve $s \notin A$ ise $s \in A'$ olduğunu gösterin.

9. $s,\ A$ için bir alt sınır ve $s \in A'$ ise $s = \inf A$ olduğunu gösterin.

10. $\{0\} \neq G,\ \mathbb{R}$ nin bir **alt grubu**, $s = \inf\{x \in G : x > 0\}$ olsun. Aşağıdakileri gösteriniz:

    (a) $s = 0$ ise $G,\ \mathbb{R}$ de yoğundur.

    (b) $s > 0$ ise $s \in G$ olmak zorundadır.

    (c) $s > 0$ ise $G = \{ns : n \in \mathbb{Z}\}$ dir (Cebir dili ile: $G,\ s$ tarafından üretilen devirli gruptur).

11. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir halka homomorfizması ($\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $f(x + y) = f(x) + f(y),\ f(xy) = f(x)f(y)$) ve $f(1) \neq 0$
    olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x$ olduğunu aşağıdaki adımları izleyerek gösterin.

    (a) $f(1) = 1,\ f(0) = 0$

    (b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = n$

(c) $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $f(n) = n$

(d) $\forall r \in \mathbb{Q}$ için $f(r) = r$

(e) f (kesin) artan bir fonksiyondur.

(f) $\forall r \in \mathbb{Q}^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ için $f(r) = r$

olduğunu gösterin.

12. $A = \{\frac{2^n+1}{2^{n+1}} : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. $A' = \{\frac{1}{2}\}$ olduğunu gösterin.

13. $A = \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. $A' = \{-1, 1\}$ olduğunu gösterin.

14. $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. $A' = \{0\}$ olduğunu gösterin.

15. $A = \{\sin\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. $A' = \{0\}$ olduğunu gösterin.

16. $A = \{\cos\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. $A' = \{1\}$ olduğunu gösterin.

17. $A \subseteq \mathbb{R}$ ve A sonlu olsun. $A' = \emptyset$ olduğunu gösterin.

18. $A \subseteq \mathbb{R}$ ve A sayılamaz sonsuzlukta olsun. $A' \neq \emptyset$ olduğunu gösterin. (Yol Gösterme: $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$ olduğu için $A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (A \cap [-n, n])$ olur. Sonlu kümelerin sayılabilir birleşimi sayılabilir olduğu için, en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için, $A \cap [-n_0, n_0]$ sonsuz kümedir.)

$\mathbb{R}$ nin Topolojisi

1. $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$ nin hem açık hem de kapalı olduğunu gösterin.
2. A ve B açık (kapalı) ise $A \cap B$ ve $A \cup B$ nin de açık (kapalı) olduğunu gösterin.
3. Her açık aralığın bir açık küme olduğunu gösterin.
4. Açık küme olan ama aralık olmayan bir küme bulunuz.
5. Her kapalı aralığın bir kapalı küme olduğunun gösterin.
6. Kapalı küme olan ama aralık olmayan bir küme bulunuz.
7. $a \in \mathbb{R}$ olsun. $A = \{a\}$ nın bir kapalı küme olduğunu gösterin.
8. $\mathbb{Q}$ nun ne açık ne de kapalı olduğunu gösterin.
9. $\mathbb{Q}^*$ nun ne açık ne de kapalı olduğunu gösterin.
10. $s = \sup A$ ve A kapalı ise $s \in A$ olduğunu gösterin.
11. $s = \sup A$ ve A açık ise $s \notin A$ olduğunu gösterin.
12. $A = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. A nın ne açık ne de kapalı olduğunu gösterin.
13. $A = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$ olsun. A nın kapalı olduğunu, açık olmadığını gösterin.
14. A yoğundur $\Leftrightarrow$ A yı kapsayan yegane kapalı küme $\mathbb{R}$ dir.
15. A kapalı kümedir $\Leftrightarrow$ $A' \subseteq A$
16. A bir açık küme ise $A \subseteq A'$ olduğunu gösterin.
17. * A bir açık küme olsun. $A' = A \Leftrightarrow A = \mathbb{R}$ olduğunu gösterin.
18. * A, $\mathbb{R}$ de yoğun ve kapalı ise $A = \mathbb{R}$ olduğunu gösterin.