MT 241 Analiz 3 Sorular 7

Seriler

1. $\sum x_n$ mutlak yakınsak bir seri ve (y_n) sınırlı bir dizi ise, $\sum(x_n y_n)$ nin de mutlak yakınsak bir seri olduğunu gösterin.

2. * (x_n) yakınsak bir dizi ve $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bir **eşleme** (1-1 ve örten bir fonksiyon) olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $y_n = x_{f(n)}$ olarak tanımlayalım. $\lim x_n = \lim y_n$ olduğunu gösterin.

3. * Önceki sorudaki iddiayı, (x_n) has ıraksak iken de kanıtlayınız.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri ise $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{a_n} - 1)$ yakınsaktır $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsaktır.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri ise $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$ yakınsaktır $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsaktır.

6. Aşağıdaki serilerin yakınsaklıklarını inceleyiniz. ($p,\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\alpha > 1$)

   (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\alpha}}$
   (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$
   (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{n}}$
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha}}$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$
   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}$
   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n^p}\right)$
   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}$
   (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{5\cdot 7\cdots(2n+3)}$
   (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$
   (l) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)$ $(a > 1)$
   (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n^2]{a} - 1\right)$ $(a > 1)$
   (n) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}}$
   (o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$
   (p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{\sqrt{n}}}$
   (q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^{\sqrt{n}}}$
   (r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$
   (s) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)$
   (t) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$
   (u) $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$