MT241 Analiz III, **14.01.2003**

Öğrenci No, Adı Soyadı :....................... ....

Aşağıda verilen önermelerin bilindiğini varsayarak soruları cevaplayınız. Soruların cevaplarını, her sorunun hemen altında ayrılan yere yazınız. Başka yerlere veya kağıtlara yazılan cevaplar kesinlikle okunmayacaktır. Başarılar.

i) $0 < y$ ise $\frac{y-1}{y} \leq \ln y \leq y - 1$ dir.

SORULAR

1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > 0$ ve $\lim x_n = 0$ olsun Aşağıadki önermeleri kanıtlayınız.
   (a) $\frac{x_n}{1+x_n} \leq \ln(1 + x_n) \leq x_n$
   (b) $\lim \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1.$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ positif terimli yakınsak bir seri ise $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + x_n)$ yakınkaktır.

2. $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} + ...$serisinin toplamını bulunuz.($n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ farkını göz önüne alınız.) ..

3. $a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+2)!}$ olduğuna göre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

4. .$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli yakınsak bir seri ise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ serisinin yakınsak olduğunu kanıtlayınız.

5. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız.

   (a) $0 < M$ bir sabit ve (a_n) dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $|a_n| \leq M$ koşulunu sağlayan bir dizi olsun. $A_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1})$ ise her her $n \in \mathbb{N}$ için $|A_n| \leq 2M$ dir.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{n}$ serisi yakınsaktır.