

## Tam Sıralı cisimler Sayılamazdır:

Teorem: Tam, sıralı bir cisim sayılamaz bir kümedir.

İspat:  $F$ , bir tam sıralı cisim ve  $f : \mathbb{N} \rightarrow F$  bir fonksiyon olsun.  $f$  nin örten olduğunu varsayıp bir çelişkiye ulaşacağız.

$I_1 = [a_1, b_1] = [f(1) + 1, f(1) + 2]$  olsun.  $I_1$ ;  $f(1) \notin I_1$  olacak şekilde, kapalı ve sınırlı, 1 birim uzunluğunda bir aralıktır.

$I_1$  i üç eşit (kapalı) alt aralığa ( $[a_1, \frac{2a_1+b_1}{3}]$ ,  $[\frac{2a_1+b_1}{3}, \frac{a_1+2b_1}{3}]$ ,  $[\frac{a_1+2b_1}{3}, b_1]$  alt aralıklarına) bölelim, herbirinin uzunluğu  $\frac{1}{3}$  olur.

Bu üç alt aralığın arakesiti boş olduğu için,  $f(2)$ , bu aralıklardan en çok ikisine ait olabilir (hiç birine ait de olmayabilir), en az birisine ait değildir.

$f(2)$  yi içermeyen alt aralığa (birden çok ise, aralıklardan herhangi birini seçip), ona  $I_2 = [a_2, b_2]$  diyelim.  $I_2 \subset I_1$  dir,  $f(2) \notin I_2$  ve  $I_2$  nin uzunluğu  $\frac{1}{3}$  olur. Tümevarımla,  $\forall n \in \mathbb{N}$  için,  $I_{n+1} \subset I_n$  ve  $b_n - a_n = \frac{1}{3^{n-1}}$  ve  $f(n) \notin I_n$  olacak şekilde  $I_n = [a_n, b_n]$  aralıkları oluşturabiliriz. Tam sıralı cisimlerdeki içiçe aralıklar

özelliğinden (ve  $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$  olduğundan)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{\alpha\}$  olacak şekilde tek bir  $\alpha \in F$  elemanı vardır.

$f$  nin örten olduğu varsayıldığı için,  $f(n_0) = \alpha$  olacak şekilde bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  vardır. Dolayısıyla,  $f(n_0) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$  yani  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $f(n_0) \in I_n$  dir. Ama,  $I_{n_0}$  aralığının seçiminden dolayı,  $f(n_0) \notin I_{n_0}$  olduğunu biliyoruz. Çelişki.