MT 242 Analiz 4 Sorular 1

1 Limit

1. $\lim_{x\to 6}\sqrt{x+3} = 3$ olduğunu tanımı kullanarak gösteriniz.

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon, $\lim_{x\to 0} f(x) = L$ ve $a\neq 0$ olsun. Eğer $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $g(x) = f(ax)$ şeklinde tanımlanırsa $\lim_{x\to 0} g(x) = L$ olduğunu gösteriniz.

3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon, her $x,y\in\mathbb{R}$ için $f(x+y) = f(x)+f(y)$ ve $\lim_{x\to 0} f(x) = L$ olsun. O zaman $L = 0$ ve her $c\in\mathbb{R}$ için $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ olduğunu gösteriniz.

4. $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$ in (sayı) olmadığını ve $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ olduğunu gösteriniz.

5. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız.

   (a) $1 < x \in\mathbb{R}$ ise $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$ dir.

   (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ dır.

6. $c\in\mathbb{R}$, $f : A = (c,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $f(x) > 0$ olsun. O zaman aşağıdaki önermeyi kanıtlayın:
$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty \iff \lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)} = 0$$

7. $f : A\to\mathbb{R}$, $g : B\to\mathbb{R}$, $\lim_{x\to c} f(x) = L > 0$, $\lim_{x\to c} g(x) = +\infty$ ve $c\in (A\cap B)'$ ise $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = +\infty$ olduğunu gösteriniz.

8. A üstten sınırlı olmayan bir küme; $f,g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyon, her $x\in A$ için $g(x) > 0$ ve $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$ olsun. Aşağıdaki önermeyi kanıtlayın:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

9. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}\ ,\ p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N} \text{ ve } (p,q) = 1 \\ 0 & x\in\mathbb{Q}^* \end{cases}$$
olsun. ($\forall c\in\mathbb{R}$ için) $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ olduğunu gösteriniz.

10. Aşağıdakileri kanıtlayınız.

    (a) $\lim_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x-1} = +\infty$

    (b) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{\sqrt{x}} = +\infty$