MT 242 Analiz 4 Sorular 3

Düzgün Süreklilik

1. f ve g bir A kümesinde düzgün sürekli ise, $f \pm g$ ve ($\in \mathbb{R}$ olmak üzere) cf nin de A kümesinde düzgün sürekli olduğunu gösterin.

2. f ve g bir A kümesinde düzgün sürekli ama fg (çarpım) nin de A kümesinde düzgün sürekli olmadığı bir örnek bulun.

3. f bir A kümesinde, g, $f(A)$ yı kapsayan bir B kümesinde düzgün sürekli olsun. $g \circ f$ nin de A kümesinde düzgün sürekli olduğunu gösterin.

4. f bir A kümesinde düzgün sürekli ve $B \subseteq A$ ise, f nin B kümesinde de düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

5. $f, g : A \to \mathbb{R}$ düzgün sürekli ve sınırlı fonksiyonlar ise $fg : A \to \mathbb{R}$ in de düzgün sürekli olduğunu kanıtlayınız.

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli ve periodik bir fonksiyon ise f nin düzgün sürekli olduğunu kanıtlayınız.

7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ve $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ise $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nin düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

8. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ise $[1, \infty)$ da düzgün sürekli fakat $(0, \infty)$ da düzgün sürekli değildir. Gösteriniz.

9. $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \sqrt{x}$ olarak tanımlanan fonksiyon olsun. f nin düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

10. Eğer f fonksiyonu bir $a \in A$ için $(-\infty, a]$ ve $[a, +\infty)$ kümeleri üzerinde düzgün sürekli ise $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ düzgün süreklidir. Gösteriniz.

11. f, A ve B kümelerinde düzgün sürekli olduğu ama $A \cup B$ kümesinde düzgün sürekli (hatta sürekli bile) olmadığı bir örnek bulunuz.

12. A,$B \subseteq \mathbb{R}$ ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. $f : A \to \mathbb{R}$ ve $g : B \to \mathbb{R}$ düzgün sürekli fonksiyonlar olsun. $h : A \cup B \to \mathbb{R}$,
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$
olsun. Eğer $\inf\{|x-y| : \ x \in A \text{ ve } y \in B\} > 0$ ise $h : A \cup B \to \mathbb{R}$ nin düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.