MT 242 Analiz 4 Sorular 5
Türev

1. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ fonksiyonunun her noktada her basamaktan türevlenebildiğini gösteriniz. (Yol gösterme: Tümevarım ile ($R_n(x)$ ler bazı rasyonel fonksiyonlar olmak üzere) $f(x) = \begin{cases} R_n(x)e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ olduğunu gösterin)

2. $n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu
$$f(x) = \begin{cases} x^n & , \quad 0 \leq x \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$
olarak tanımlansın.
   (a) f nin $x = 0$ da türevlenebilir olması için n ne olmalıdır?
   (b) $f'(x)$ in mevcut olduğu n ler için $f'(x)$ nin $c = 0$ da sürekli olması için n ne olmalıdır?

3. $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{Q}^* \end{cases}$ fonksiyonunun sadece 0 da türevlenebilir olduğunu gösteriniz.

4. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^3 + 2x + 1$ fonksiyonu kesin artan ve türevlenebilir bir fonksiyondur. $x = 0, 1, -1$ için $y = h(x)$ de $\left(h^{-1}\right)'(y)$ yi hesaplayınız.

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ çift (tek) fonksiyon olsun. f , $\mathbb{R}$ de her noktada türevlenebilir ise $f'(x)$ tek (çift) fonksiyondur.

6. $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x \neq -1$ ve $n \geq 0$ tamsayı ise
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \, n!}{(x+1)^{n+1}}$$
olduğunu gösteriniz.

7. Ortalama değer teoremini kullanarak her $x, y \in \mathbb{R}$ için $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ olduğunu gösteriniz.

8. $f : I \to \mathbb{R}$ (I: bir aralık) bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in I$ için $|f(x) - f(y)| \leq K.\,|x - y|$ olacak şekilde bir $K > 0$ varsa f fonksiyonuna Lipschitz koşulunu sağlıyor denir. Eğer f, I üzerinde türevlenebilir ve f' sınırlı ise f nin I üzerinde Lipschitz koşulunu sağladığını gösteriniz.

9. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve (a, b) aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $\lim_{x \to a} f'(x) = A$ ise $f'(a)$ nın mevcut ve A ya eşit olduğunu gösteriniz.

10. I bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in I$ için $f'(x) \neq 0$ ise o zaman her $x \in I$ için ya $f'(x) > 0$ ya da $f'(x) < 0$ olduğunu gösteriniz.

11. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ türevlenebilir iki fonksiyon, $f(0) = g(0)$ ve her $x \geq 0$ için $f'(x) < g'(x)$ olsun. O zaman her $x \geq 0$ için $f(x) \leq g(x)$ olduğunu gösteriniz.

12. $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir ve $\lim_{x \to \infty} (f(x) + f'(x)) = L \in \mathbb{R}$ olsun. $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ ve $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$ olduğunu gösteriniz. (Yol Göst. $f(x) = \frac{e^x f(x)}{e^x}$ dir.)

13. f bir I aralığında n defa türevlenebilir bir fonksiyon $a \neq 0$ ve $g(x) = f(ax)$, $x \in \frac{1}{a}.I$ olsun.

$$g^{(n)}(x) = a^n f^{(n)}(ax)$$

olduğunu gösteriniz.

14. $a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ ise $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ polinomunun $(0,1)$ aralığında bir kökü olduğunu kanıtlayınız.

15. I bir aralık, $M > 0$ bir sabit ve $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq M(x-y)^2$$

koşulunu sağlasın. f nin I da sabit olduğunu gösteriniz.

16. $a, b, A \in \mathbb{R}$, $A > 0$, $g : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I da türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $g(a) = 0$ ve her $x \in I$ için

$$g'(x) \leq Ag(x)$$

ise her $x \in I$ için $g(x) \leq 0$ olduğunu gösteriniz. (Yol Göst. $g(x)e^{-Ax}$ fonksiyonunun azalan olduğunu gösteriniz.)

17. $a, b, A \in \mathbb{R}$, $A > 0$ olsun. $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I da türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $f(a) = 0$ ve her $x \in I$ için

$$|f'(x)| \leq A|f(x)|$$

ise her $x \in I$ için $f(x) = 0$ olduğunu gösteriniz. (Yol Göst. $g(x) = (f(x))^2$ ise $g'(x) \leq Ag(x)$ olduğunu gösteriniz.)

18. $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $(0, \infty)$ de türevlenebilir ve $[0, \infty)$ da sürekli bir fonksiyon olsun. $f(0) = 0$ ve $f\,'$ artan bir fonksiyon ise $x \in (0, \infty)$ için

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

olarak tanımlanan g fonksiyonunun artan olduğunu gösteriniz.

19. $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir ve $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ olsun. $x \in (0, \infty)$ için

$$g(x) = f(x+1) - f(x)$$

olarak tanımlanan g fonksiyonu için

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

olduğunu gösteriniz.

20. $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli, (a,b) de türevlenebilir ve her $x \in (a,b)$ için $f'(x) > 0$ ve $g'(x) > 0$ olsun. $f(a) = g(a) = 0$ ve $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ artan bir fonksiyon ise $x \in (a,b)$ için

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

olarak tanımlanan h fonksiyonunun da artan olduğunu gösteriniz. Bundan faydalanarak

$$\frac{x}{\sin x},\ \frac{\frac{1}{2}x^2}{1-\cos x},\ \frac{\frac{1}{6}x^3}{x - \sin x},\ .....$$

fonksiyonlarının $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ de artan olduğunu kanıtlayınız. (Yol Göst. $x, y \in (a,b)$ ve $x < y$ ise $\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}$ ve $\frac{f(x)}{g(x)}$ bölümlerine Cauchy Ortalama Değer Teoremini uygulayınız.)

21. $a, b, A \in \mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ de iki defa türevlenebilir bir fonksiyon ve her $x \in I$ için

$$g''(x) \geq 0$$

olsun. $a \leq r < s < t \leq b$ ise

$$\frac{g(s) - g(r)}{s - r} \leq \frac{g(t) - g(s)}{t - s}$$

olduğunu gösteriniz.