MT 242 Analiz 4 Sorular 6
Düzgün Yakınsaklık

1. $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ olsun. $\forall x \in [0, +\infty)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ olduğunu gösteriniz.
2. $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ olsun.$\forall x \in [0, +\infty)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ limitini hesaplayınız.
3. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ olsun.$\forall x \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ limitini hesaplayınız.
4. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ olsun.$\forall x \in [0, +\infty)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ limitini hesaplayınız.
5. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+nx}$ olsun.$\forall x \in [0, +\infty)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ limitini hesaplayınız.
6. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Arctan}(x)$ limitini hesaplayınız.
7. $\forall x \in [0, +\infty)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-nx}$ limitini hesaplayınız.
8. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} (\cos(n\pi x))^{2n}$ limitini hesaplayınız.
9. $x \in [0, \infty)$ için $g_n(x) = \frac{nx}{x+n}$ olsun.
   (a) $x \in [0, \infty)$ için $g(x) = \lim g_n(x)$ fonksiyonunu bulunuz.
   (b) (g_n) dizisi g ye düzgün yakınsar mı? Neden? ($x_n = \sqrt{n}$ alarak Düzgün Yakınsaklık için Dizi Kriterini kullanınız.)
10. $x \in [0, \infty)$ için $g_n(x) = \frac{x}{x+n}$ olsun.
   (a) $x \in [0, \infty)$ için $g(x) = \lim g_n(x)$ fonksiyonunu bulunuz.
   (b) (g_n) dizisi g ye düzgün yakınsar mı? Neden? ($x_n = n$ alarak Düzgün Yakınsaklık için Dizi Kriterini kullanınız.)
11. $x \in [0, +\infty]$ için $g_n(x) = e^{-nx}$ olsun.
   (a) $x \in [0, +\infty)$ için $g(x) = \lim g_n(x)$ fonksiyonunu bulunuz
   (b) (g_n) dizisi g ye düzgün yakınsar mı? Neden?
12. $x \in [0, \infty)$ için $g_n(x) = xe^{-nx}$ olsun.
   (a) $x \in [0, \infty)$ için $g(x) = \lim g_n(x)$ fonksiyonunu bulunuz.
   (b) (g_n) dizisi g ye düzgün yakınsar mı? Neden? ($g_n(x) = xe^{-nx}$ fonkiyonunun grafiğini çiziniz ve sup normu kullanınız.)
13. $g_n : A \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonların dizisi A da $g : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna düzgün yakınsasın ($g_n \overset{A}{\rightrightarrows} g$). $(x_n) \subset A$ yakınsak bir dizi ve $\lim x_n = x \in A$ ise $\lim g_n(x_n) = g(x)$ olduğunu gösteriniz.

14. $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyon dizisi

$$g_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$$

olsun. (g_n) nin bir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını ($g_n \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} g$) ve $x \neq 0$ için

$$\lim g_n'(x) = g'(x)$$

ve

$$\lim g_n'(0) \neq g'(0)$$

olduğunu gösteriniz.

15. $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$ ve $f_n \overset{B}{\rightrightarrows} f$ ise $f_n \overset{A\cup B}{\rightrightarrows} f$ olduğunu gösteriniz.

16. $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$ ve $g_n \overset{A}{\rightrightarrows} g$ ise $f_n \pm g_n \overset{A}{\rightrightarrows} f \pm g$ ve her $c \in \mathbb{R}$ için $cf_n \overset{A}{\rightrightarrows} cf$ olduğunu gösteriniz.

17. $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$ ve $g_n \overset{A}{\rightrightarrows} g$ ama $f_n g_n \overset{A}{\not\rightrightarrows} fg$ olacak şekilde fonksiyon dizileri ve A kümesi bulunuz. (Yol gösterme $A = [0, +\infty)$, $f_n(x) = g_n(x) = x + \frac{1}{n}$ alıp , $x_n = n$ dizisini kullanın)

18. $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$ ve $g_n \overset{A}{\rightrightarrows} g$ ve $(\|f_n\|_A)$ dizisi ve g, A da sınırlı ise $f_n g_n \overset{A}{\rightrightarrows} fg$ olduğunu gösteriniz.

19. $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$ ve g fonksiyonu $\mathbb{R}$ de düzgün sürekli ($\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f_n(A) \cup f(A)$ da düzgün sürekli olması yeterli) ise $g \circ f_n \overset{A}{\rightrightarrows} g \circ f$ (bileşke) olduğunu gösteriniz.

20. (f_n) bir A kümesinde düzgün Cauchy dizisi ve g fonksiyonu $\mathbb{R}$ de düzgün sürekli ($\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f_n(A)$ da düzgün sürekli olması yeterli) ise $(g \circ f_n)$ (bileşke) fonksiyon dizisinin A da düzgün Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.

21. $f_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$ olsun. $\forall a \in (0,1)$ için ($A = [-a, a]$ olmak üzere) $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$ olduğunu ama $f_n \overset{(-1,1)}{\not\rightrightarrows} f$ olduğunu gösteriniz. (Yol gösterme $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ dizisini kullanın)

22. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ serisinin her sınırlı kümede düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^3}$ serisi düzgün yakınsaktır. Bundan faydalanarak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \arctan \frac{x}{n}$ serisinin her sınırlı aralıkta düzgün yakınsak ve

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \arctan \frac{x}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2} \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ serisinin terim terime türetilebilir olduğunu gösteriniz.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}$ serisinin toplamının sürekli bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

26. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ serisinin $x > 0$ için düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz. Bu seri $x > 0$ için terim terime türevlenebilir mi?

27. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ ve $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ serilerinin yakınsaklık yarıçapının 1 ve birinci serinin toplamının $\frac{1}{1-x}$ ikinci serinin toplamının $\frac{1}{1+x}$ olduğunu gösteriniz.

28. $|x| < 1$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ olduğunu gösteriniz.

29. $|x| < 1$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x)$ olduğunu gösteriniz.

30.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

($|x| < 1$) olduğunu gösteriniz.

31.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n = \frac{1}{(1-x)^3}$$

($|x| < 1$) olduğunu gösteriniz.

32.

$$2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...\right) = \log \frac{1+x}{1-x}$$

($|x| < 1$) olduğunu gösteriniz.

33.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

olduğunu gösteriniz.

34. $p(x)$ sıfırdan farklı bir polinom olduğuna göre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(n)}{n!} x^n$$

serisinin toplamını bulunuz.

35. $x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} C(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - .... \\ S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - .... \end{aligned}$$

olsun. Her iki serinin de yakınsaklık yarıçapı ∞ dur.

36. Her $x \in \mathbb{R}$ için $C'(x) = -S(x)$ ve $S'(x) = -C(x)$ olduğunu gösteriniz.

37. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $\mathbb{R}$ de mutlak yakınsaktır.O halde her

$$\begin{aligned} S(x+y) &= S(x)C(y)+C(x)S(y) \\ C(x+y) &= C(x)C(y)-S(x)S(y) \end{aligned}$$

olduğunu gösteriniz. Bundan faydalanarak her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} S(x \pm y) &= S(x)C(y) \pm C(x)S(y) \\ C(x \pm y) &= C(x)C(y) \mp S(x)S(y) \end{aligned}$$

$$S(x)^2 + C(x)^2 = 1$$

$$S(2x) = 2S(x)C(x)$$

$$C(2x) = C(x)^2 - S(x)^2 = 2C(x)^2 - 1 = 1 - 2S(x)^2$$

olduğunu gösteriniz.

38. $0 < x < 2$ için $S(x) > 0$, $C(2) < 0$ olduğunu gösteriniz. Bundan faydalanarak $C(x)$ in bir ve bir tek $0 < p < 2$ için $C(p) = 0$ olduğunu gösteriniz.

39. Aşağıdaki tabloda alınan değerlerin doğruluğunu gösteriniz.

x	0	p	$2p$	$3p$	$4p$
$S(x)$	0	1	0	-1	0
$C(x)$	1	0	-1	0	1

40. $4p$ nin S, C fonksiyonlarının temel periyodu olduğunu kanıtlayınız.