MT 242 ANALİZ 4 ARA SINAV (2017) ÇÖZÜMLER

1. Hem $\mathbb{Q}$ hem de $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}$ de yoğun olduğu için $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in \mathbb{Q}$, $x_n \neq 2$ ve $\lim x_n = 2$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $y_n \in \mathbb{Q}^*$, $y_n \neq 2$ ve $\lim y_n = 2$ olacak şekilde (x_n) ve (y_n) dizileri vardır (Örneğin $x_n = 2 + \frac{1}{n}$, $y_n = 2 + \frac{\sqrt{2}}{n}$). $\lim f(x_n) = \lim x_n = 2$ ve $\lim f(y_n) = \lim 1 = 1$ ve $1 \neq 2$ olduğu için Dizi kriterinden, $\lim_{x\to 2} f(x)$ (sonlu veya sonsuz olarak) var olamaz. (Çünki $\lim_{x\to 2} f(x) = L$ olsaydı, dizi kriterinden, $2 = \lim f(x_n) = L = \lim f(y_n) = 1$ olurdu.)

2. $M \in \mathbb{R}$ verilsin. $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ olduğu için, $0 < |x - c| < \delta$ iken $f(x) > M$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Aynı δ sayısı için, $0 < |x - c| < \delta$ iken $g(x) > f(x) > M$ olur. Bu da, $\lim_{x\to c} g(x) = +\infty$ olduğunu gösterir.

3. Bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $\delta \leq 1$ olduğunu varsayalım. $|x - 3| < \delta$ olsun. Bu durumda $|x + 2| \leq |x - 3| + 5 < 6$ olur ve

$$|f(x) - f(3)| = |x^2 - x + 2 - 8| = |x - 3||x + 2| < 6|x - 3| < 6\delta$$

olur. δ sayısını, $\delta \leq 1$ ve $6\delta \leq \varepsilon$ olacak şekilde seçebilirsek, f nin $c = 3$ de sürekli olduğu gösterilmiş olacaktır. $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{6}\}$ seçtiğimizde her iki koşul da sağlanır. Öyleyse, f nin $c = 3$ de sürekli olduğu gösterilmiştir.

4. f, $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan, $|f|$ de $[a, b]$ aralığında süreklidir. Maksimum-Minimum Teoreminden, $|f|$ bir $c \in [a, b]$ sayısında $[a, b]$ aralığındaki minimum değerine ulaşır. Kabulumüzden, bir $z \in [a, b]$ sayısı için $|f(z)| \leq \frac{1}{2}|f(c)|$ olur. $|f|$, c de $[a, b]$ aralığındaki minimum değerine ulaştığı için $|f(c)| \leq |f(z)|$ olur.
Bu ikisinden, $|f(c)| \leq \frac{1}{2}|f(c)|$ elde edilir. (MT 241 dersinde gösterildiği gibi) bu ancak $|f(c)| = 0$ iken doğru olur. $|f(c)| = 0$ olması da $f(c) = 0$ olmasına eşdeğerdir.

5. f nin $I = [a, b]$ aralığında sabit olmadığını varsayalım. Sürekli fonksiyonların aralıkları koruma özelliğinden, $f(I)$ da bir aralık olur. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ de yoğun olduğu için $f(I)$ aralığında en az bir rasyonel sayı vardır. Ama kabulümüzden, f nin rasyonel değerler almadığını biliyoruz. Çelişki. Öyleyse f, $I = [a, b]$ aralığında sabit olmalıdır.

6. Bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $x, y \in [-\frac{1}{2}, +\infty)$ olduğunda $|x + 1| \geq \frac{1}{2}$ ve $|y + 1| \geq \frac{1}{2}$ olur ve ($|x - y| < \delta$ ve $x, y \in [-\frac{1}{2}, +\infty)$ olduğu zaman)

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1}\right| = \left|\frac{x-y}{(x+1)(y+1)}\right| = \frac{|x-y|}{|x+1||y+1|} \leq \frac{|x-y|}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = 4|x-y| < 4\delta$$

olur. $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ seçtiğimizde

$$|x - y| < \delta \text{ ve } x, y \in [-\tfrac{1}{2}, +\infty) \text{ olduğunda } |f(x) - (y)| < \varepsilon$$

olduğu yukarıda gösterilmiştir.

7. Bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin.
f, A da düzgün sürekli olduğu için,

$$|x-y| < \delta_1 \text{ ve } x, y \in A \text{ olduğunda } |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $\delta_1 > 0$ sayısı vardır.
g, A da düzgün sürekli olduğu için,

$$|x-y| < \delta_2 \text{ ve } x, y \in A \text{ olduğunda } |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $\delta_2 > 0$ sayısı vardır.
$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ olsun. $\delta > 0$ ve $\delta \le \delta_1$ ve $\delta \le \delta_2$ olur.

$|x-y| < \delta$ ve $x, y \in A$ ise $|x-y| < \delta_1$ ve $|x-y| < \delta_2$ olur ve bunun sonucunda

$$|(f+g)(x)-(f+g)(y)| = |(f(x)-f(y))+(g(x)-g(y))| \le |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Bu da $f+g$ nin A kümesinde düzgün sürekli olduğunu gösterir.