MT 311 CEBİR III

Problemler 1

1)$\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinde $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerini

$$a \oplus b = a + b - 1,\ a \odot b = ab - (a+b) + 2$$

olarak tanımlayalım. Bu işlemlerle $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinin birim elemanlı değişmeli bir halka ve tamlık bölgesi olduğunu gösteriniz.

2)$\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinde $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerini

$$a \oplus b = a + b + 1,\ a \odot b = ab + a + b$$

olarak tanımlayalım. Bu işlemlerle $\mathbb{Q}$ tamsayılar kümesinin birim elemanlı değişmeli bir halka ve cisim olduğunu gösteriniz.

3)$A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinde $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerini

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)\,,\ \ (a,b) \odot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

olarak tanımlayalım. Bu işlemlerle $(A, \oplus, \odot)$ nın birim elemanlı değişmeli bir halka ve cisim olduğunu gösteriniz.

4)D bir küme P_D ise D nin kuvvet kümesi yani D nin tüm alt kümelerinin kümesi olsun. P_D kümesinde toplama ve çarpma işlemlerini $A, B \in P_D$ için

$$A + B = (A - B) \cup (B - A)\,,\ A.B = A \cap B$$

olarak tanımlayalım. $(P_D, +, .)$ nın birim elemanlı değişmeli bir halka fakat tamlık bölgesi ve cisim olmadığını gösteriniz.

5)Bir A halkasında her $a \in A$ için $a^2 = a$ ise A ya bir Boole halkası denir. Ohalde Abir Boole halkası olsun. Aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu kanıtlayınız.

i) Her $a \in A$ için $a = -a$ dır.

ii) A değişmeli bir halkadır.

6) A birim elemanlı bir Boole halkası olsun. Aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu kanıtlayınız.

i) A nın 0 ve 1hariç her eleman sıfır bölendir.

ii) A nın tek tersinir elemanı 1dir.

7) R bir halka, A ve B onun idealleri olsun.

$$A + B = \{x + y : x \in A,\ y \in B\}$$

ise $A + B$ nin de R nin bir ideali olduğunu gösteriniz. Eğer

$$AB = \left\{ s = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n : a_i \in A,\ b_i \in B,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

ise AB nin de R nin bir ideali olduğunu gösteriniz.

8)$\mathbb{Z}$ de $A = \{7k : k \in \mathbb{Z}\}$ olsun. A nın $\mathbb{Z}$ nin bir ideali olduğunu ve eğer V, $A \subseteq V \subseteq \mathbb{Z}$ koşulunu sağlayan bir ideal ise $V = A$ veya $V = \mathbb{Z}$ olduğunu gösteriniz.

9) R bir halka U onun bir ideali ve

$$B = \{x \in R : \text{her } u \in U \text{ için } xu = 0\ \}$$

olsun. B nin R de bir ideal olduğunu gösteriniz.

10)R bir halka U onun bir ideali ve

$$B = \{x \in R : \text{her } r \in R \text{ için } rx \in U\ \}$$

olsun. B nin R de bir ideal olduğunu gösteriniz.

11) A bir değişmeli halka J ve K da onun idealleri olsunlar. Aşağıdaki iddiaların doğruluğunu ispatlayınız.

i) $J \cap K = \{0\}$ ise $jk = 0$ (her $j \in J$ ve her $k \in K$ için) dır.

ii)Her $a \in A$ için $I_a = \{ax + j + k : a \in A, j \in J, k \in K\}$ kümesinin bir ideal olduğunu gösteriniz.

iii)Her $a \in A$ için $N_a = \{x \in A : ax = 0\}$ kümesinin bir ideal olduğunu gösteriniz.