MT 311 CEBİR III

Problemler 2

1)$\mathbb{R}$ bir halka, U da $\mathbb{R}$ nin bir ideali olsun. $1 \in U$ ise $U = \mathbb{R}$ olduğunu gösteriniz.

2) F bir cisim ise F nin $\{0\}$ ve F dışında ideali olmadığını gösteriniz.

3)Bir cismin her homomorfizminin bir izomorfizm veya her elemanı sıfıra götürdüğünü gösteriniz.

4)$(R, +, .)$ birim elemanlı bir halka olsun. R deki işlemleri kullanarak yine R üzerinde $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerini

$$a \oplus b = a + b + 1, \; a \odot b = ab + a + b$$

olarak tanımlayalım. Bu halkayı $\left(\widetilde{R}, \oplus, \odot\right)$ ile gösterelim. R nin $\widetilde{R}$ ye izomorfik olduğunu gösteriniz. (R ve $\widetilde{R}$ kümleri aynı kümeler sadece üzerlerindeki işlemlerin faklı olduğuna dikkat ediniz.)

5)Aşağıdaki fonksiyonların birer halka homomorfizm olduğunu gösteriniz. Çekirdeğini ve görüntü kümesini bulunuz.

a)$\varphi : F(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$; $\varphi(f) = f(0)$

b)$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\varphi(x, y) = x$

c) $A = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$ olmak üzere $\varphi : \mathbb{R} \to A$; $\varphi(x) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

d)$B = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$ olmak üzere $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to B$; $\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$

6) R birim elemanlı bir halka ve $f : R \to S$ bir homomorfizm olsun. $f(1)$ in G_f nin birim elemanı olduğunu fakat $f(1)$ in S nin birim elemanı olmak zorunda olmadığını gösteriniz. (Burada $G_f = f(R)$ dir.)

7) D kümesinin belirli bir alt kümesi C olmak üzere $h : P_C \to P_C$ dönüşümünü $h(A) = A \cap D$ olarak tanımlayalım. h nın bir homomorfizm olduğunu gösteriniz. Çekirdeğini ve görüntü kümesini bulunuz.

8) A ve B herhangi iki halka $f : A \to B$ bir homomorfizma ise aşağıdakileri ispatlayınız.

i) $f(A)$ kümesi B nin bir alt halkasıdır.

ii) $f(0) = 0$

iii) A değişmeli ise $f(A)$ kümesi de değişmelidir.

9)$B = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$ olmak üzere $f : C \to B$; fonksiyonunu $f(a + bi) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ olarak tanımlarsak f nin bir izomorfizm olduğunu gösteriniz.

10) $A = \{(x,x) : x \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ alt halkasının $\mathbb{Z}$ ye izomorfik olduğunu gösteriniz.

11) A bir değişmeli halka ve J de onun bir ideali olsun. J nin radikalini $R(J) = \{a \in A :$ bir $n \in \mathbb{Z}$ için $a^n \in J\}$ olarak tanımlayalım. $R(J)$ nin A da bir ideal olduğunu gösteriniz.

12)A ve B herhangi iki halka $f : A \to B$ bir örten homomorfizm ve J de A nın bir ideali olsun. Eğer $K_f \subseteq J$ ise $f(J)$ kümesi B nin bir idealidir.

13) $M[0,1]$ ile $[0,1]$ aralığında tanımlı tüm gerçel değerli sürekli fonksiyonlar halkasını gösterelim. Bu halkada $A = \left\{f \in M[0,1] : f\left(\frac{1}{2}\right) = 0\right\}$ olarak tanımlanan A kümesinin bir ideal olduğunu gösteriniz.