Theorem 1 *F, tanım kümesi $\mathbb{R}^3$ de açık bir küme olan, kısmi türevleri sürekli bir fonksiyon ve $c \in \mathbb{R}$, $S = F^{-1}(c)$ olsun. Eğer:*

1. *$S \neq \emptyset$*
2. *$\forall p \in S,\ (\nabla F)_p \neq 0$*

ise S yönlendirilebilen bir türevlenebilen yüzeydir.

İspat:S nin türevlenebilir bir yüzey olduğu daha önce gösterildi.
S nin türevlenebilir bir yüzey olduğunu gösterirken oluşturulan yamalarda bazı değişiklikler yaparak yeni yamalar oluşturacağız. Bu yamaların düzgün ve has oluşları hemen hemen aynı olduğu için tekrarlanmayacaktır.
$p \in S$ olsun. $(\nabla F)_p \neq 0$ olduğu için $\frac{\partial F}{\partial x}(p)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(p)$, $\frac{\partial F}{\partial z}(p)$ den en az biri sıfırdan farklıdır.

1. $\frac{\partial F}{\partial x}(p) \neq 0$ olsun. Kapalı Fonksiyon Teoreminden,

$$U \cap S = \{(f(y,z), y, z) : (y,z) \in D\}$$

olacak şekilde bir p yi içeren bir $U \subset \mathbb{R}^3$ de açık kümesi, bir $D \subset \mathbb{R}^2$ de açık kümesi ve diferansiyellenebilen bir $f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır.

- Eğer $\frac{\partial F}{\partial x}(p) > 0$ ise U açık kümesini gerekirse biraz küçülterek (D açık kümesi de yukarıdaki eşitlik doğru kalacak şekilde küçültülecektir), $\forall q \in U$ için $F_x(q) = \frac{\partial F}{\partial x}(q) > 0$ varsayabiliriz. Bu durumda $\mathbf{x}(u,v) = (f(u,v), u, v)$ olarak tanımlayalım. (Kapalı fonksiyonlar için kısmi türev formüllerini kullanarak)

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\vec{i} + \vec{j}\right) \times \left(\frac{\partial f}{\partial v}\vec{i} + \vec{k}\right) = \vec{i} - \frac{\partial f}{\partial u}\vec{j} - \frac{\partial f}{\partial v}\vec{k} = \vec{i} + \frac{F_y}{F_x}\vec{j} + \frac{F_z}{F_x}\vec{k} = \frac{1}{F_x}\nabla F$$

olur.

- Eğer $\frac{\partial F}{\partial x}(p) < 0$ ise U açık kümesini gerekirse biraz küçülterek (D açık kümesi de yukarıdaki eşitlik doğru kalacak şekilde küçültülecektir), $\forall q \in U$ için $F_x(q) = \frac{\partial F}{\partial x}(q) < 0$ varsayabiliriz. Bu durumda $\mathbf{x}(u,v) = (\bar{f}(u,v), v, u)$, $(\bar{f}(u,v) = f(v,u))$ olarak tanımlayalım (yamanın tanım kümesi D nin $u = v$ doğrusuna göre yansıması olan açık küme olacaktır). ($\forall(u,v)$ için $F(\bar{f}(u,v), v, u) = c$ olduğundan, Kapalı fonksiyonlar için kısmi türev formüllerini kullanarak)

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial u}\vec{i} + \vec{k}\right) \times \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial v}\vec{i} + \vec{j}\right) = -\vec{i} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}\vec{k} = -\vec{i} - \frac{F_y}{F_x}\vec{j} - \frac{F_z}{F_x}\vec{k} = -\frac{1}{F_x}\nabla F$$

olur.

2. $\frac{\partial F}{\partial y}(p) \neq 0$ olsun. Kapalı Fonksiyon Teoreminden,

$$U \cap S = \{(x, g(x,z), z) : (x,z) \in D\}$$

olacak şekilde bir p yi içeren bir $U \subset \mathbb{R}^3$ de açık kümesi, bir $D \subset \mathbb{R}^2$ de açık kümesi ve diferansiyellenebilen bir $g : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır.

- Eğer $\frac{\partial F}{\partial y}(p) > 0$ ise U açık kümesini gerekirse biraz küçülterek (D açık kümesi de yukarıdaki eşitlik doğru kalacak şekilde küçültülecektir), $\forall q \in U$ için $F_y(q) = \frac{\partial F}{\partial y}(q) > 0$ varsayabiliriz. Bu durumda $\mathbf{x}(u,v) = (v, \bar{g}(u,v), u)$, $(\bar{g}(u,v) = g(v,u))$ olarak tanımlayalım (yamanın tanım kümesi D nin $u = v$ doğrusuna göre yansıması olan açık küme olacaktır). ($\forall(u,v)$ için $F(v, \bar{g}(u,v), u) = c$ olduğundan, Kapalı fonksiyonlar için kısmi türev formüllerini kullanarak)

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial u}\vec{j} + \vec{k}\right) \times \left(\vec{i} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial v}\vec{j}\right) = -\frac{\partial \bar{g}}{\partial u}\vec{i} + \vec{j} - \frac{\partial \bar{g}}{\partial v}\vec{k} = \frac{F_x}{F_y}\vec{i} + \vec{j} + \frac{F_z}{F_y}\vec{k} = \frac{1}{F_y}\nabla F$$

olur.

- Eğer $\frac{\partial F}{\partial y}(p) < 0$ ise U açık kümesini gerekirse biraz küçülterek (D açık kümesi de yukarıdaki eşitlik doğru kalacak şekilde küçültülecektir), $\forall q \in U$ için $F_y(q) = \frac{\partial F}{\partial y}(q) < 0$ varsayabiliriz. Bu durumda $\mathbf{x}(u,v) = (u, g(u,v), v)$ olarak tanımlayalım. (Kapalı fonksiyonlar için kısmi türev formüllerini kullanarak)

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \left(\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial u}\vec{j}\right) \times \left(\frac{\partial g}{\partial v}\vec{j} + \vec{k}\right) = \frac{\partial g}{\partial u}\vec{i} - \vec{j} + \frac{\partial g}{\partial v}\vec{k} = -\frac{F_x}{F_y}\vec{i} - \vec{j} - \frac{F_z}{F_y}\vec{k} = -\frac{1}{F_y}\nabla F$$

  olur.

3. $\frac{\partial F}{\partial y}(p) \neq 0$ olsun. Kapalı Fonksiyon Teoreminden,

$$U \cap S = \{(x, y, h(x,y)) : (x,y) \in D\}$$

olacak şekilde bir p yi içeren bir $U \subset \mathbb{R}^3$ de açık kümesi, bir $D \subset \mathbb{R}^2$ de açık kümesi ve diferansiyellenebilen bir $h : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır.

- Eğer $\frac{\partial F}{\partial z}(p) > 0$ ise U açık kümesini gerekirse biraz küçülterek (D açık kümesi de yukarıdaki eşitlik doğru kalacak şekilde küçültülecektir), $\forall q \in U$ için $F_z(q) = \frac{\partial F}{\partial z}(q) > 0$ varsayabiliriz. Bu durumda $\mathbf{x}(u,v) = (u, v, h(u,v))$ olarak tanımlayalım. (Kapalı fonksiyonlar için kısmi türev formüllerini kullanarak)

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \left(\vec{i} + \frac{\partial h}{\partial u}\vec{k}\right) \times \left(\vec{j} + \frac{\partial h}{\partial v}\vec{k}\right) = -\frac{\partial h}{\partial u}\vec{i} - \frac{\partial h}{\partial v}\vec{j} + \vec{k} = \frac{F_x}{F_z}\vec{i} + \frac{F_y}{F_z}\vec{j} + \vec{k} = \frac{1}{F_z}\nabla F$$

  olur.

- Eğer $\frac{\partial F}{\partial z}(p) < 0$ ise U açık kümesini gerekirse biraz küçülterek (D açık kümesi de yukarıdaki eşitlik doğru kalacak şekilde küçültülecektir), $\forall q \in U$ için $F_z(q) = \frac{\partial F}{\partial z}(q) < 0$ varsayabiliriz. Bu durumda $\mathbf{x}(u,v) = (v, u, \bar{h}(u,v))$, ($\bar{h}(u,v) = h(v,u)$) olarak tanımlayalım (yamanın tanım kümesi D nin $u = v$ doğrusuna göre yansıması olan açık küme olacaktır). ($\forall(u,v)$ için $F(v, u, \bar{h}(u,v)) = c$ olduğundan, Kapalı fonksiyonlar için kısmi türev formüllerini kullanarak)

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \left(\vec{j} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial u}\vec{k}\right) \times \left(\vec{i} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial v}\vec{k}\right) = \frac{\partial \bar{h}}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial u}\vec{j} - \vec{k} = -\frac{F_x}{F_z}\vec{i} - \frac{F_y}{F_z}\vec{j} - \vec{k} = -\frac{1}{F_z}\nabla F$$

  olur.

Her durumda $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$, ∇F nin yönünde (yani pozitif bir sayı ile çarpımı) olduğu için, iki yamanın görüntülerinin arakesitlerindeki her noktada, (iki farklı yamada oluşturulan) $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ vektörleri aynı yönde (yani her biri diğerinin bir pozitif sayı ile çarpımı) olacaktır. Bu da yönlendirilebilmenin tanımıdır.