MK 321 Diferensiyel Geometri
2013 ARA SINAV ÇÖZÜMLER

1. (a) $S \subset \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=4\} = g^{-1}(4),\ g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.
$\nabla g = 2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}, \quad \|\nabla g\| = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2}=4$. $n = \pm\frac{1}{2}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$. n "aşağıya dönük" olduğundan (S üzerinde $z>0$) $n = -\frac{1}{2}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$ olur.
$\nabla \times F = -\vec{k}, \quad (\nabla\times F)\cdot n = \frac{1}{2}z$ olur.

$$\int_S (\nabla\times F)\cdot n\, d\sigma = \int_S \frac{z}{2}\, d\sigma = \int_{S_z} \frac{z}{2}\frac{4}{|2z|}\, dA = \int_{S_z} 1\, dA = S_z \text{ nin alanı}$$

S_z nin sınırı: $x^2+y^2+1^2=4, \quad x^2+y^2=3$ ($\sqrt{3}$ yarıçaplı çember) olduğundan S_z nin Alanı$=3\pi$ olup, $\displaystyle\int_S (\nabla\times F)\cdot n\, d\sigma = 3\pi$ olur.

(b) C nin xy-düzlemine izdüşümü: $x^2+y^2=3$ çemberidir. C nin (S ile uyumlu) yönlendirmesinin, C nin izdüşümünde belirlediği yön saat yönüdür. Bu nedenle C eğrisi:
$x=\sqrt{3}\sin t, \quad y=\sqrt{3}\cos t, \quad z=1 \quad (0\le t\le 2\pi)$
şeklinde parametrize edilebilir. $\int_C F\ dr = \int_C y\, dx = \int_0^{2\pi}(\sqrt{3}\cos t)(\sqrt{3}\cos t\, dt) = \int_0^{2\pi} 3\cos^2 t\, dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos(2t))\, dt = \frac{3}{2}(t+\frac{1}{2}\sin(2t))\Big|_0^{2\pi} = 3\pi$

2. (a) $d\omega = dx\wedge dz + dy\wedge dz$ olur. $x=s,\ y=t,\ z=s^2+t$ olduğundan
$\sigma^*(d\omega) = ds\wedge(2s\, ds+dt) + dt\wedge(2s\, ds+dt) = (1-2s)\, ds\wedge dt,\ \phi_2(\sigma^*(d\omega)) = 1-2s$ bulunur.

$$\int_\sigma d\omega = \int_0^1\int_0^1 (1-2s)\, ds\, dt = \int_0^1 \left(s-\frac{s^2}{2}\right)\Big|_0^1 dt = \int_0^1 0\, dt = 0$$

(b)
$\sigma_1^1(s)=\sigma(1,s)=(1,s,1+s) \quad (\sigma_1^1)^*\omega = (1+s)\, ds \quad \phi_1((\sigma_1^1)^*\omega) = 1+s$
$\sigma_1^0(s)=\sigma(0,s)=(0,s,s) \quad (\sigma_1^0)^*\omega = s\, ds \quad \phi_1((\sigma_1^0)^*\omega) = s$
$\sigma_2^1(s)=\sigma(s,1)=(s,1,s^2+1) \quad (\sigma_2^1)^*\omega = 2s(1+s)\, ds \quad \phi_1((\sigma_2^1)^*\omega) = 2s(s+1)$
$\sigma_2^0(s)=\sigma(s,0)=(s,0,s^2) \quad (\sigma_2^0)^*\omega = 2s^2\, ds \quad \phi_1((\sigma_2^0)^*\omega) = 2s^2$
olur.

$$\int_{\partial\sigma}\omega = \int_{\sigma_1^1}\omega - \int_{\sigma_1^0}\omega - \int_{\sigma_2^1}\omega + \int_{\sigma_2^0}\omega = \int_0^1 (1+s-s-2s^2-2s+2s^2)\, ds = \int_0^1 (1-2s)\, ds = 0 \text{ olur.}$$

3. (a) $\alpha(t) = \cos(5t)\,\vec{i} + \sin(5t)\,\vec{j} + 12t\,\vec{k},\ (t\in\mathbb{R})$ olsun. $\alpha'(t) = -5\sin(5t)\,\vec{i} + 5\cos(5t)\,\vec{j} + 12\,\vec{k}$,
$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{25\sin^2(5t)+25\cos^2(5t)+144} = 13$ olur. $h^{-1}(t) = \int_0^t 13\, dt = 13t$ alabiliriz. $h(t) = \frac{t}{13}$ bulunur. ($h^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ olduğundan) $\beta(s) = \alpha(h(s)) = \cos(\frac{5s}{13})\,\vec{i} + \sin(\frac{5s}{13})\,\vec{j} + \frac{12s}{13}\,\vec{k},\ (s\in\mathbb{R})$.
α nın yay uzunluğu ile parametrize edilmiş (bir) şeklidir.

(b) $\beta(0)=0$ ama $\gamma(t)\neq 0$ ($\forall t\in\mathbb{R}$) olduğundan β ve γ nın görüntüleri farklıdır. Bu nedenle denk olamazlar.

4. $T = \beta'(s) = \dfrac{1}{2}\cos s\,\vec{i} - \dfrac{1}{2}\sin s\,\vec{j} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{k}$
$T' = -\frac{1}{2}\sin s\,\vec{i} - \frac{1}{2}\cos s\,\vec{j},\ \kappa = \|T'\| = \frac{1}{2}$ olur.
$N = \frac{T'}{\kappa} = -\sin s\,\vec{i} - \cos s\,\vec{j},\ B = T\times N = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos s\,\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin s\,\vec{j} - \frac{1}{2}\,\vec{k}$ olur.
$\tau = -B'\cdot N = -\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin s\,\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos s\,\vec{j}\right)\cdot(-\sin s\,\vec{i} - \cos s\,\vec{j}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ olur.