MK 321 Diferensiyel Geometri
2017 ARA SINAV ÇÖZÜMLER

1. S; 3-boyutlu uzayda, sınırlı, C eğrisi ise çevrelenmiş, $\mathbf{n}$ birim normal vektör alanı ile yönlendirilmiş bir yüzey; $\mathbf{F}$, (bileşenlerinin kısmi türevleri sürekli olan) bir vektör alanı olsun. C eğrisi; $\mathbf{n}$ normal vektörü C üzerinde hareket ederken, yüzey solda kalacak şekilde (S ile "uyumlu" olarak) yönlendirilsin. O zaman

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_C \mathbf{F} \cdot dr$$

olur.

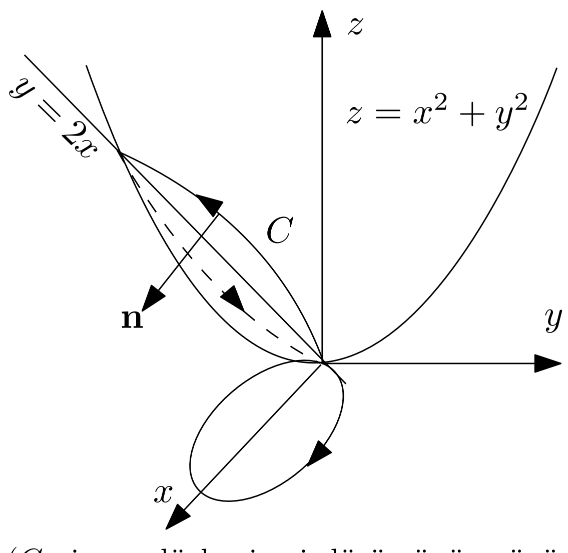
2. (a) $S : \overbrace{z - x^2 - y^2}^{g} = 0$ olduğu için $\mathbf{n} = \pm \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \pm \frac{-2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$ olmalıdır. Normal vektör aşağı dönük olduğu için, $\mathbf{k}$ nın katsayısı (bileşeni) negatif olmalıdır. Buradan $\mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$ bulunur.

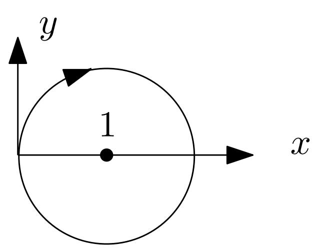
$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}, \quad \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_S \frac{-1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\, d\sigma$$

dir. (Yüzeyin denklemi z için çözülebildiğinden, S nin xy düzlemine izdüşümü 1-1 dir.)
S_z, S nin xy düzlemine izdüşümü olmak üzere

$$\int_S \frac{-1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\, d\sigma = \int_{S_z} \frac{-1}{\|\nabla g\|} \frac{\|\nabla g\|}{\left|\frac{\partial g}{\partial z}\right|}\, dA = \int_{S_z} (-1)\, dA = -S_z \text{ nin alanı}$$

S_z nin çevresi $x^2 + y^2 = 2x$ ($(x-1)^2 + y^2 = 1$) çemberi ve bu çemberin alanı (yarıçapı 1 olduğu için) π olduğundan $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = -\pi$ bulunur.





(b)
(C nin xy düzlemine izdüşümünün yönü negatif olduğu için)
İzdüşüm eğrisinin parametrizasyonu: $x = 1 + \sin t,\ y = \cos t \quad 0 \le t \le 2\pi$
C nin parametrizasyonu: $x = 1 + \sin t,\ y = \cos t\ z = 2(1 + \sin t) \quad 0 \le t \le 2\pi$ olur.

$$\int_C F \cdot dr = \int_C x\, dy = \int_0^{2\pi} ((1 + \sin t)\, \mathbf{j}) \cdot (\cos t\, \mathbf{i} - \sin t\, \mathbf{j} + 2\cos t\, \mathbf{k})\, dt = -\int_0^{2\pi} (\sin t + \sin^2 t)\, dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left(\sin t + \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)\right) dt = \left(\cos t - \frac{1}{2}(t - \frac{1}{2}\sin 2t)\right)\Big|_0^{2\pi} = -\pi$$

3. Genelleştirilmiş Stokes Teoremi: k pozitif bir doğal sayı, σ, ($\mathbb{R}^n$ de) de bir singüler k simpleks ve ω ($\mathbb{R}^n$ de) bir $k-1$ form olmak üzere $\displaystyle\int_\sigma d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega$ olur.

   (a) $d\omega = dx \wedge dz + dy \wedge dz$ olur. $x = s+t,\ y = s^2,\ z = t$ olduğundan
   $\sigma^*(d\omega) = (ds + dt) \wedge dt + (2s\,ds) \wedge dt = (1+2s)\,ds \wedge dt,\ \phi_2(\sigma^*(d\omega)) = 1 + 2s$ bulunur.
   $$\int_\sigma d\omega = \int_0^1 \int_0^1 (1+2s)\,ds\,dt = \int_0^1 \left(s+s^2\right)\Big|_0^1\,dt = \int_0^1 2\,dt = 2$$

   (b)
   $$\begin{array}{lll} \sigma_1^1(t) = \sigma(1,t) = (1+t,1,t) & (\sigma_1^1)^*\omega = (2+t)\,dt & \phi_1((\sigma_1^1)^*\omega) = 2+t \\ \sigma_1^0(t) = \sigma(0,t) = (t,0,t) & (\sigma_1^0)^*\omega = t\,dt & \phi_1((\sigma_1^0)^*\omega) = t \\ \sigma_2^1(t) = \sigma(t,1) = (t+1,t^2,1) & (\sigma_2^1)^*\omega = (t+1+t^2)\,d1 = 0 & \phi_1((\sigma_2^1)^*\omega) = 0 \\ \sigma_2^0(t) = \sigma(t,0) = (t,t^2,0) & (\sigma_2^0)^*\omega = (t+t^2)\,d0 = 0 & \phi_1((\sigma_2^0)^*\omega) = 0 \end{array}$$ olur.
   $$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\sigma_1^1} \omega - \int_{\sigma_1^0} \omega - \int_{\sigma_2^1} \omega + \int_{\sigma_2^0} \omega = \int_0^1 (2+t-t)\,dt = \int_0^1 2\,dt = 2$$
   olur.

4. (a) $\alpha(t) = e^t \cos t\,\mathbf{i} + e^t \sin t\,\mathbf{j} + e^t\,\mathbf{k},\ (t \in \mathbb{R})$ olsun. $\alpha'(t) = e^t(\cos t - \sin t)\,\mathbf{i} + e^t(\sin t + \cos t)\,\mathbf{j} + e^t\,\mathbf{k}$,
   $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2\cos t \sin t + \cos^2 t + 1)} = \sqrt{3}\,e^t$ olur.

   $h^{-1}(t) = \int \sqrt{3}\,e^t\,dt = \sqrt{3}\,e^t + C$ olur. $C = 0$ alalım.
   $h(t) = \ln \frac{t}{\sqrt{3}}$ bulunur. ($h^{-1}(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ olduğundan)

   $\beta(s) = \alpha(h(s)) = \frac{s}{\sqrt{3}} \cos(\ln \frac{s}{\sqrt{3}})\,\mathbf{i} + \frac{s}{\sqrt{3}} \sin(\ln \frac{s}{\sqrt{3}})\,\mathbf{j} + \frac{s}{\sqrt{3}}\,\mathbf{k},\ (s > 0)$.
   α nın yay uzunluğu ile parametrize edilmiş (bir) şeklidir.

   (b) $\gamma(0) = \mathbf{0}$ ama ($e^t \neq 0$ olduğu için) $\alpha(t) \neq \mathbf{0}$ ($\forall t \in \mathbb{R}$) olduğundan α ve γ nın görüntüleri farklıdır. Görüntü kümeleri farklı olduğu için α ile γ denk olamazlar.

5. r yarıçaplı, $\mathbf{c}$ merkezli kürenin (vektörel) denklemi $(\mathbf{v} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{c}) = r^2$ dir. β bu küre üzerinde olduğu için $\forall s \in I$ için $(\beta(s) - \mathbf{c}) \cdot (\beta(s) - \mathbf{c}) = r^2$ olur.Türev alarak ($\beta' = T$ olduğu için) $2T \cdot (\beta(s) - \mathbf{c}) = 0$ yani $T \cdot (\beta(s) - \mathbf{c}) = 0$ elde edilir. Tekrar türev alarak $T' \cdot (\beta(s) - \mathbf{c}) + T \cdot T = 0$ elde edilir. $T \cdot T = 1$ olduğu için $T' \cdot (\beta(s) - \mathbf{c}) = -1$ ve $|T' \cdot (\beta(s) - \mathbf{c})| = 1$ bulunur. Skalar çarpım ile ilgili $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$ (Cauchy-Schwartz) eşitsizliğinden, $\|T'\| = \kappa$ ve $\|\beta(s) - \mathbf{c}\| = r$ oluşundan, $\kappa r \geq 1$ eşdeğer olarak $\kappa \geq \frac{1}{r}$ elde edilir.