MT 334 KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİ FİNAL SINAVI (2018) ÇÖZÜMLER

1. $f(z) = \operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln r + i\,\theta$ $(z = re^{i\theta},\ r > 0,\ -\pi < \theta \leq \pi)$ olduğunu ve bu fonksiyonun $r > 0,\ -\pi < \theta < \pi$ bölgesinde analitik olduğunu biliyoruz. (Kutupsal koordinatlarda türev formülünden) $f'(z) = e^{-i\theta}(U_r + i\,V_r) = \frac{1}{z} = z^{-1}$ olur. Daha sonra da her $n \geq 1$ için $f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}(n-1)!z^{-n}$ olur. Dolayısıyla
$f^{(n)}(1+i) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\,i & n = 0 \\ (-1)^{n-1}(n-1)!(1+i)^{-n} & n > 0 \end{cases}$ olur.
Taylor serisinin katsayıları $a_n = \dfrac{f^{(n)}(1+i)}{n!} = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\,i & n = 0 \\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{n(1+i)^n} & n > 0 \end{cases}$ olur.
$\operatorname{Log} z$ nin $1+i$ merkezli Taylor serisi,

$$\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\,i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+i)^n}(z-1-i)^n$$

olur. Log fonksiyonunun, $1+i$ sayısına en yakın tekil noktası 0 olduğu ve aradaki uzaklık $\sqrt{2}$ olduğu için, bu Taylor serisinin yakınsaklık yarıçapı $\sqrt{2}$ dir.
(ve $|z-1-i| < \sqrt{2}$ dairesinde $\operatorname{Log} z = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\,i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+i)^n}(z-1-i)^n$ olur.)

2. $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1} = \dfrac{1}{z-1}\dfrac{1}{z+1}, \qquad \dfrac{1}{z+1} = \dfrac{1}{2-(1-z)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-(\frac{1-z}{2})}$ olur.
Geometrik seri toplam formülünden,

$$|z-1| < 2 \text{ için } \frac{1}{z+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n$$

Bu toplam, $f(z)$ de yerine konulduğunda

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}(z-1)^n$$

3. (a) Bir f kompleks fonksiyonu, bir z_0 kompleks sayısı merkezli bir dairenin içindeki, z_0 **hariç**, her noktada analitik ise, z_0 noktası (f nin) bir ayrık tekil noktasıdır denir.

(b) Bir z_0 kompleks sayısı, bir f kompleks fonksiyonunun ayrık tekil noktası olsun. Eğer f nin (bir $r > 0$ için) $0 < |z - z_0| < r$ halkasındaki Laurent serisinde, **sonlu çoklukta** (ama en az bir tane) n için, $b_n \neq 0$ ise, f fonksiyonu z_0 da bir kutup noktasına sahiptir deriz.

(c) Bir z_0 kompleks sayısı, bir f kompleks fonksiyonunun ayrık tekil noktası olsun. Eğer f nin (bir $r > 0$ için) $0 < |z - z_0| < r$ halkasındaki Laurent serisinde, her $n \geq 1$ için, $b_n = 0$ ise, f fonksiyonu, z_0 da bir kaldırılabilir tekilliğe sahiptir deriz.

(d) Bir z_0 kompleks sayısı, bir f kompleks fonksiyonunun ayrık tekil noktası olsun. Eğer f nin (bir $r > 0$ için) $0 < |z - z_0| < r$ halkasındaki Laurent serisinde **sonsuz çoklukta** n için, $b_n \neq 0$ ise, f fonksiyonu z_0 da bir esas tekil noktaya sahiptir deriz.

(e) z_0 kompleks sayısı, bir f fonksiyonunun ayrık tekil noktası ve f, $|z-z_0|<R$ dairesinde (merkezi hariç) analitik olsun. C, bu daire içinde kalan, z_0 noktası içinde kalacak şekilde, pozitif yönlü herhangi bir basit kapalı eğri olmak üzere, $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ sayısına f nin z_0 daki rezidüsü denir.(Çoklu bağlantılı bölgelerde Cauchy-Goursat Teoreminden dolayı, bu sayı C nin seçiminden bağımsızdır)

4. C: pozitif yönlü $|z-1|<2$ çemberi olmak üzere $\displaystyle\int_C \frac{e^z-1}{z^3\cos z}\,dz$ integralini hesaplayınız.
$z^3\cos z$ fonksiyonunun sıfırları: $0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$ olup bunlardan yalnızca 0 ve $\frac{\pi}{2}$ bu çemberin içindedir ve bu çember üzerinde $f(z)=\frac{e^z-1}{z^3\cos z}$ analitik olup, çemberin içinde yalnızca 2 tane tekil noktası (0 ve $\frac{\pi}{2}$) vardır. Dolayısıyla bu tekil noktalar (0 ve $\frac{\pi}{2}$) ayrıktır. (Çember, basit kapalı eğri ve pozitif yönlü olduğundan) Rezidü Teoreminden:

$$\int_C \frac{e^z-1}{z^3\cos z}\,dz = 2\pi i(\mathrm{Rez}(f(z),0)+\mathrm{Rez}(f(z),\tfrac{\pi}{2})) \quad \text{olur}$$

Cauchy İntegral Formülünden (Çemberler pozitif yönlü ve $0<r<\frac{\pi}{2}$)

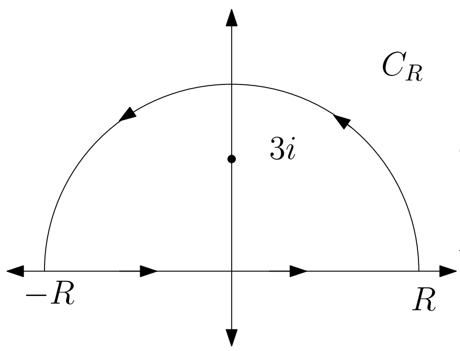
$$\mathrm{Rez}(f(z),0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{\phi(z)}{z^2}\,dz=\phi'(0)=\frac{1}{2} \quad \left(\phi(z)=\frac{1+\frac{z}{2}+\cdots}{\cos z}\right)\ C_r:|z|<r$$

$$\text{(Ya da)}\ \mathrm{Rez}(f(z),0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{\phi(z)}{z^3}\,dz=\frac{\phi''(0)}{2!}=\frac{1}{2} \quad \left(\phi(z)=\frac{e^z-1}{\cos z}\right)\ C_r:|z|<r$$

$$\mathrm{Rez}(f(z),\tfrac{\pi}{2})=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{\frac{e^z-1}{z^3}}{\cos z}\,dz=\frac{g(\frac{\pi}{2})}{h'(\frac{\pi}{2})}=\frac{8(1-e^{\frac{\pi}{2}})}{\pi^3} \quad \left(g(z)=\frac{e^z-1}{z^3},\ h(z)=\cos z\right)\ C_r:|z-\tfrac{\pi}{2}|<r$$

bulunur. Dolayısıyla:

$$\int_C \frac{e^z-1}{z^3\cos z}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{2}+\frac{8(1-e^{\frac{\pi}{2}})}{\pi^3}\right) \quad \text{bulunur.}$$

5. 

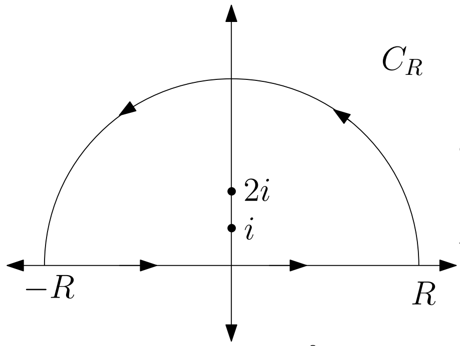
$R>3$ olmak üzere yandaki şekildeki yarım çember ve çaptan oluşan pozitif yönlü basit kapalı eğriyi alalım. $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+9}$ fonksiyonu bu eğri üzerinde analitikdir ve içinde, $3i$ **hariç**, analitikdir.

Rezidü teoreminden, $\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Rez}(f(z),3i)$ dir. $\mathrm{Rez}(f(z),3i)=\dfrac{e^{-3}}{2(3i)}=\dfrac{e^{-3}}{6i}$

$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = \int_{-R}^{R}\frac{\cos x+i\sin x}{x^2+9}\,dx+\int_{C_R}f(z)\,dz$ dir. ($f(z)$ nin paydası 2. derece olduğundan) Jordan eşitsizliğini de kullanarak, $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}f(z)\,dz=0$ olur. Buradan,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x+i\sin x}{x^2+9}\,dx=2\pi i\left(\frac{e^{-3}}{6i}\right)=\frac{\pi}{3e^3}$$

Buradan da $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+9}\,dx=\frac{\pi}{3e^3}$ bulunur. $\dfrac{\cos x}{x^2+9}$ çift fonksiyon olduğundan,
$\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+9}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+9}\,dx=\frac{\pi}{6e^3}$ olur.

6. 

$R > 2$ olmak üzere yandaki şekildeki yarım çember ve çaptan oluşan pozitif yönlü basit kapalı eğriyi alalım. $f(z) = \dfrac{1}{z^4 + 5z^2 + 4}$ fonksiyonu bu eğri üzerinde analitikdir ve içinde, i ve $2i$ **hariç**, analitikdir.

Rezidü teoreminden, $\int_C f(z)\,dz = 2\pi i(\mathrm{Rez}(f(z), i) + \mathrm{Rez}(f(z), 2i))$ dir. $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^4 + 5x^2 + 4}\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz$ dir. ($f(z)$ nin paydası 4. derece olduğundan), $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0$ olur. Buradan, (her ikisi de basit kutup olduğundan)

$$\mathrm{Rez}(f(z), i) = \frac{1}{4i^3 + 10i} = \frac{1}{6i}, \quad \mathrm{Rez}(f(z), 2i) = \frac{1}{32i^3 + 20i} = \frac{-1}{12i}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 5x^2 + 4} = 2\pi i \left(\frac{1}{6i} - \frac{1}{12i} \right) = \frac{\pi}{6}$$

bulunur.