MT 334 KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİ
1. Kompleks Sayılar

1. $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için şağıdakileri gösteriniz:
   (a) $\mathrm{Re}(z_1 z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Re}(z_2) - \mathrm{Im}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2)$
   (b) $\mathrm{Im}(z_1 z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2) + \mathrm{Im}(z_1)\,\mathrm{Re}(z_2)$
   (c) $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z)$
   (d) $\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}(z)$
2. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $z, w \in \mathbb{C}$ için $\mathrm{Re}(az + bw) = a\,\mathrm{Re}(z) + b\,\mathrm{Re}(w)$ olduğunu gösteriniz.
3. $\sqrt{2}|z| \geq |\,\mathrm{Re}\,z| + |\,\mathrm{Im}\,z|$ olduğunu gösteriniz (ipucu:$(|x| - |y|)^2 \geq 0$ eşitsizliğinden yararlanınız.)
4. Aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan noktaları düzlemde gösteriniz:
   a)$|z + i| \leq 3$ b) $|z - 4i| \geq 4$ c) $0 < |z - 2i| < 2$
5. $|z-4i|+|z+4i| = 10$ ifadesinin, odakları $(0, \pm 4)$ olan bir elips olduğunu geometrik olarak açıklayınız.
6. $|z - 1| = |z + i|$denkleminin, eğimi -1 olan bir doğru olduğunu gösteriniz.
7. Aşağıdaki kümeleri kompleks düzlemde gösteriniz.
   a) $\mathrm{Re}(\bar{z} - i) = 2$ b) $|2z - i| = 4$
8. $|z_1| \neq |z_2|$ ise $\left|\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right| \leq \frac{|z_1|+|z_2|}{||z_1|-|z_2||}$ olduğunu gösterin.
9. Aşağıdakileri gösteriniz:
   (a) $|z| \leq 1$ ise $|\mathrm{Re}(2 + \bar{z} + z^3| \leq 4$
   (b) $|z| = 2$ ise $\left|\frac{1}{z^4-4z^2+3}\right| \leq \frac{1}{3}$
10. Aşağıdakileri gösteriniz
    (a) z reeldir $\Leftrightarrow$ $\bar{z} = z$
    (b) z reel veya sırf sanaldır $\Leftrightarrow$ $\bar{z}^2 = z^2$
11. $|z - z_0| = R$ çemberinin $|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\bar{z_0}) + |z_0|^2 = R^2$ olarak yazılabileceğini gösteriniz.
12. $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolunu $z^2 + \bar{z}^2 = 2$ olarak ifade ediniz.
13. Aşağıdaki sayıların esas argümentlerini bulunuz ve kutupsal formda yazınız:
    a) $z = \frac{i}{-2-i}$ b) $z = \left(\sqrt{3} - i\right)^6$
14. $0 \leq \theta \leq 2\pi$ aralığında $|e^{i\theta} - 1| = 2$ denklemini geometrik olarak çözün.
15. $|w| < 1$ olmak üzere $|z| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right| \leq 1$ önermesini ispatlayınız.
16. $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ olduğunu gözönüne alarak z^{-1} i geometrik olarak açıklayınız.
17. $\mathrm{Re}\,z_1 > 0$ ve $\mathrm{Re}\,z_2 > 0$ ise $\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg} z_1 + \mathrm{Arg} z_2$

18. $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0,\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olsun. $|z_1| = |z_2| \to z_1 = c_1 c_2$ ve $z_2 = c_1 \bar{c_2}$ olacak şekilde $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ vardır. (İpucu: $e^{i\frac{(\theta_1+\theta_2)}{2}} e^{i\frac{(\theta_1-\theta_2)}{2}} = e^{i\theta_1}$ ve $e^{i\frac{(\theta_1+\theta_2)}{2}} \overline{e^{i\frac{(\theta_1-\theta_2)}{2}}} = e^{i\theta_2}$)

19. Aşağıdakileri gösteriniz:

    (a) $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \quad (z \in \mathbb{C},\ z \neq 1,\ n \in \mathbb{N})$

    (b) $1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$

20. $z_1 z_2 \neq 0$ ise aşağıdakileri gösteriniz:

    (a) $\mathrm{Re}(z_1\bar{z_2}) = |z_1||z_2| \Leftrightarrow \theta_1 - \theta_2 = 2n\pi\ (n \in \mathbb{Z})$

    (b) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow \theta_1 - \theta_2 = 2n\pi\ (n \in \mathbb{Z})$

21. a) $(-16)^{\frac{1}{4}}$ b) $(-8 - 8\sqrt{3}i)^{\frac{1}{5}}$ c) $8^{\frac{1}{6}}$

22. $z_0 = -4\sqrt{2} + i4\sqrt{2}$ ve $c_0 = \sqrt{2}(1+i),\ w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ ise z_0 sayısının 3. dereceden tüm köklerinin $c_0, c_0 w, c_0 w^2$ olduğunu gösteriniz.

23. (a) $a \in \mathbb{R}$ ise $(a+i)^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{A}\ e^{i\frac{\alpha}{2}}$ olduğunu gösteriniz. (Burada $A = \sqrt{a^2+1}$ ve $\alpha = \mathrm{Arg}(a+i)$)

    (b) (a) da bulunan köklerin $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{A+a}+i\sqrt{A-a}$ olarak yazılabileceğini gösteriniz.

24. $n \in \mathbb{N},\ w,\ 1$ in bir n-inci kökü ve $w \neq 1$ ise $1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0$ olduğunu gösteriniz.

25. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz:
    a) $z^5 - 2 = 0$ b) $z^3 - 1 + \sqrt{3} = 0$

26. Aşağıdaki ifadeleri en basit biçimde yazınız:
    a) $\sqrt{1+\sqrt{i}}$ b) $\sqrt{\sqrt{-i}}$

27. $n \in \mathbb{N},\ w,\ 1$ in bir n-inci kökü ve $w \neq 1$ olsun. $1 + 2w + 3w^2 + \cdots + nw^{n-1}$ ifadesini hesaplayınız.

28. Aşağıdaki kümeleri düzlemde gösteriniz:
    a) $0 \leq \arg z \leq \pi/4,\ (z \neq 0)$ b) $|z-4| \geq |z|$ c) $|\mathrm{Re}\, z| < |z|$
    d) $|z| \leq 1,\ 0 \leq \arg z \leq \pi$ e) $|z| = 1,\ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$
    f) $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leq \frac{1}{2}$ g) $0 \leq \arg(z-2i) < \frac{3\pi}{2}$
    h) $1 \leq |z-2+i| \leq 2,\quad \frac{\pi}{2} < \arg(z-2+i) < \pi$
    i) $0 < |z| < 2,\quad 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$