MT 334 KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİ
2 Limit, Türev

1. Aşağıdakileri gösteriniz:
   (a) $\lim_{z\to z_0}(az+b) = az_0 + b \ (a,b\in\mathbb{C})$
   (b) $\lim_{z\to z_0} \bar{z} = \bar{z}_0$
   (c) $\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}^2}{z} = 0$

2. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız:
   a)$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{z^n}, \ (z_0 \neq 0, \ n\in\mathbb{N})$ b) $\lim_{z\to i} \frac{iz^3-1}{z+1}$

3. $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ ise $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = |w_0|$ olduğunu gösteriniz.

4. $\Delta z = z - z_0$ olduğunu gözönüne alarak
   $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta z\to 0} f(z_0 + \Delta z) = w_0$
   önermesini gösteriniz.

5. Aşağıdakileri gösteriniz:
   a) $\lim_{z\to\infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2} = 4$ b) $\lim_{z\to 1} \frac{1}{(z-1)^3} = \infty$ c) $\lim_{z\to\infty} \frac{z^2+1}{z-1} = \infty$

6. Türevin tanımından yararlanarak $f(z) = \frac{1}{z}$ fonksiyonunun türevinin $f'(z) = \frac{-1}{z^2}$ olduğunu gösteriniz.

7. $f(z_0) = g(z_0) = 0$, $f'(z_0), \ g'(z_0)$ var ve $g'(z_0) \neq 0$ olsun. Tanımdan yararlanarak $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$ olduğunun gösteriniz.

8. Türevin tanımından yararlanarak aşağıdaki fonksiyonların türevinin olmadığını gösteriniz:
   a) $f(z) = \bar{z}$ b) $f(z) = \operatorname{Re} z$ c) $f(z) = \operatorname{Im} z$

9. Türevin tanımını kullanarak aşağıdaki fonksiyonların türevinin varlığını araştırınız:
   a) $f(z) = \bar{z}x$ b) $f(z) = (x+y)\operatorname{Re} z$ c) $f(z) = z\operatorname{Im} z$

10. $f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z} & z\neq 0 \ ise \\ 0 & z = 0 \ ise \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor.
    (a) $z = 0$ ise gerçel ve sanal eksenler boyunca sıfırdan farklı her noktada $\frac{\Delta w}{\Delta z} = 1$ olduğunun gösterin.
    (b) $y = x$ boyunca $\frac{\Delta w}{\Delta z} = -1$ olduğunun gösterin.
    (c) $f'(0)$ türevinin var olmadığını gösterin.

11. Aşağıdaki fonksiyonların türevinin var olmadığını gösterin:
    a)$f(z) = z - \bar{z}$ b) $f(z) = 2x + ixy^2$ c) $f(z) = e^x e^{-iy}$

12. Aşağıdaki fonksiyonların $f'(z)$ ve $f''(z)$ türevlerinin her yerde var olduğunu gösteriniz ve bu türevleri bulunuz.
    a) $f(z) = iz + 2$ b) $f(z) = e^{-x}e^{-iy}$

13. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerinin varlığını araştırınız ve var ise türevlerini bulunuz:
    a) $f(z) = x^2 + iy^2$ b) $f(z) = z\operatorname{Im} z$ c)$f(z) = \frac{1}{z^4}, \ z\neq 0$
    d) $f(z) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}, \ r > 0, \ \alpha < \theta < \alpha + 2\pi$

14. $f(z) = x^3 + i(y-1)^3$ ise sadece $z = i$ de $f'(z) = 3x^2$ olduğunu gösterin.

15. $f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z}, & z \neq 0 \; ise \\ 0, & z = 0 \; ise \end{cases}$ veriliyor. $z = 0$ da C-R denklemleri sağlandığı halde bu noktada türevin olmadığını gösterin.

16. Aşağıdaki fonksiyonların tam fonksiyon olduğunu gösterin:
a) $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$ b) $f(z) = e^{-y} \sin x - ie^{-y} \cos x$

17. Aşağıdaki fonksiyonların hiç bir yerde analitik olmadığını gösterin:
a) $f(z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$ b) $f(z) = e^y e^{ix}$ c) $f(z) = xy + iy$

18. $f(z) = \sqrt{r}\; e^{i\frac{\theta}{2}}, r > 0, \; -\pi < \theta < \pi$ fonksiyonunun tanım kümesinde analitik olduğunu gösterin.

19. Aşağıdaki fonksiyonların harmonik olduklarını gösterip harmonik eşleniklerini bulunuz:
a) $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$ b) $u(x,y) = \sinh x \sin y$ c) $u(r,\theta) = r^3 \cos 3\theta$

20. Aşağıdaki fonksiyonların harmonik olduğu kümeyi bulun:
a) $f(z) = \mathrm{Re}\left(\frac{z^3}{(z^2+1)^2}\right)$ b) $f(z) = \mathrm{Re}\left(e^{\frac{1}{z}}\right)$

21. Bir D bölgesinde u ve v birbirlerinin harmonik eşleniği ise u ve v nin D de sabit olduklarını gösteriniz.

22. Aşağıdaki fonksiyonların analitik olup olmadığını araştırınız:
a) $f(z) = \bar{z} + 3z$ b) $f(z) = \ln r + i\theta, \; r > 0, \; -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$