MT 334 KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİ

3. Elementer Fonksiyonlar

1. $|e^{2z+i} + e^{iz^2}| \leq e^{2x} + e^{-2xy}$ olduğunu gösteriniz.

2. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz:
   a) $e^{2z-1} = i$ b) $e^z = -3$ c) $e^{\bar{z}} = 1 - i$

3. (a) $u(x, y) = \mathrm{Re}(e^{\frac{1}{z}})$ fonksiyonunun harmonik olduğu kümeyi bulunuz. Neden harmonik olduğunu açıklayınız.

   (b) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu bir D bölgesinde analitik olsun. $G(x, y) = e^{u(x,y)} \cos v(x, y)$, $H(x, y) = e^{u(x,y)} \sin v(x, y)$ fonksiyonlarının D de neden harmonik olduklarını ve H fonksiyonunun neden G nin harmonik eşleniği olduğunu açıklayınız.

4. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.
   a) $\log(z - 1) = i\pi$ b) $\mathrm{Log}(z + 1) + \mathrm{Log}\, z = i\frac{\pi}{2}$

5. Logaritmik fonksiyonun $\log z = \ln |z| + i\theta$, $|z| > 0$, $\frac{-\pi}{2} < \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ dalını kullanarak aşağıdakileri hesaplayınız:

   (a) $\log(i^2)$ ve $2 \log i$

   (b) $\log(1 - i\sqrt{3})^2$ ve $2 \log(1 - i\sqrt{3})$

   (c) $\log(i^{\frac{1}{2}})$ ve $\frac{1}{2} \log i$

6. $z = x + iy$ noktası $\alpha < y < \alpha + 2\pi$ yatay şeridinde bulunsun.
   $\log z = \ln r + i\theta$, $r > 0$, $\alpha < y < \alpha + 2\pi$ dalı için $\log e^z = z$ olduğunu gösteriniz.

7. (a) $\mathrm{Log}(z - i)$ fonksiyonunun, $y = 1$, $x \leq 0$ yarı doğrusu dışında her yerde analitik olduğunu gösteriniz.

   (b) $\frac{\mathrm{Log}(z+4)}{z^2+i}$ fonksiyonunun $\frac{\pm(1-i)}{\sqrt{2}}$ noktaları ve $y = 0$, $x \leq -4$ kümesi dışında her yerde analitik olduğunu gösteriniz.

8. Gerçel kısmı $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ olan analitik bir fonksiyon bulunuz.

9. $\mathrm{Re}(\log(z - 1)) = \frac{1}{2} \ln((x - 1)^2 + y^2)$, $(z \neq 1)$ olduğunu gösteriniz. Bu fonksiyon $z \neq 1$ için neden Laplace denklemini sağlar? Açıklayınız.

10. Aşağıdakilerin esas değerini bulunuz:
    a) $\left(\frac{e}{2}(-1 - i\sqrt{3})\right)^{3\pi i}$ b)$(-1 + i\sqrt{3})^{3/2}$

11. $c = a + ib$ verilmiş bir karmaşık sayı olsun. Ayrıca $c \notin \mathbb{Z}$ ve i^c çok değerli olsun. $|i^c|$ nin bütün değerlerinin aynı olması için c üzerinde hangi koşullar konmalıdır?

12. $f'(z)$ türevinin var olduğunu kabul edelim. $c^{f(z)}$, $(c \in \mathbb{C})$ nin türevini bulunuz.

13. Aşağıdakileri gösteriniz:

    (a) $|\sinh y| \leq |\sin z| \leq \cosh y$

    (b) $|\sinh y| \leq |\cos z| \leq \cosh y$

14. $\sin \bar{z}$ ve $\cos \bar{z}$ fonksiyonlarının hiç bir yerde analitik olmadıklarını gösteriniz.

15. Aşağıdakileri gösteriniz:
a) $\overline{\sinh z} = \sinh \bar{z}$ b) $\overline{\cosh z} = \cosh \bar{z}$

16. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz:

(a) $\sin z = \cosh 4$

(b) $\sin z = -i$

(c) $\sinh z = 1$

(d) $\cos z = 1 + i\sqrt{3}$

(e) $\tan z = i$

17. Aşağıdakileri hesaplayınız:

(a) $\operatorname{Arccos} i$

(b) $\operatorname{Arcsin} \sqrt{2}$

(c) $\operatorname{Arctan}(1+i)$

(d) $\cosh^{-1}(-1)$

(e) $\tanh^{-1}(0)$