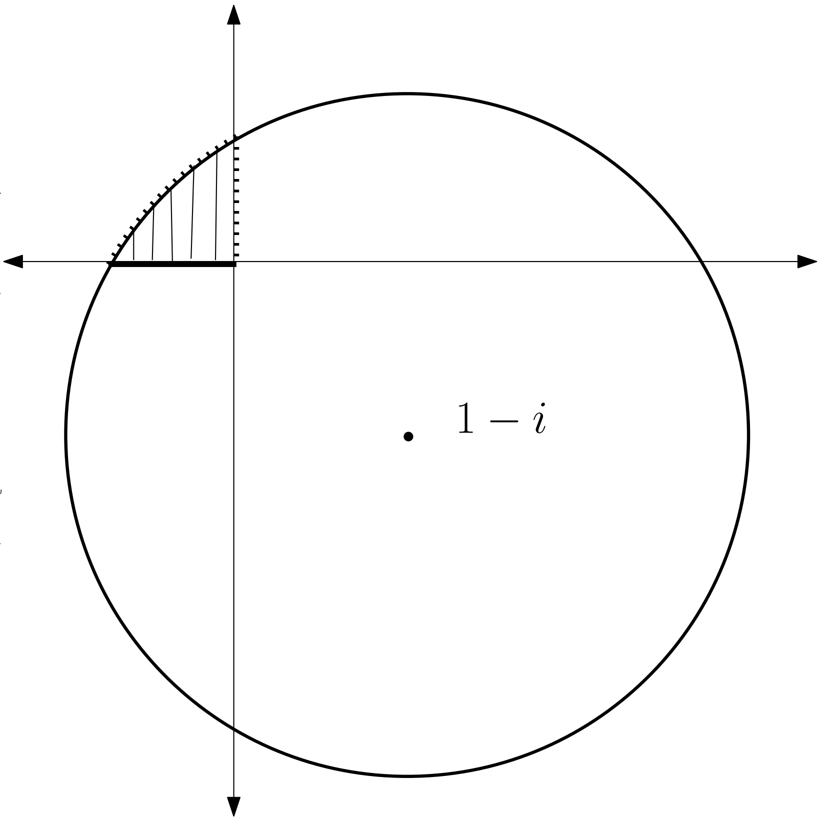
MT 334 KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİ ARA SINAVI

1. $w_0 = -1 - \sqrt{3}\, i,\ |w_0| = 2,\ \arg w_0 = \pi + \arg(1+\sqrt{3}) = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi\ (n \in \mathbb{Z})$ olduğu için dördüncü kökleri:

$$z_0 = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{\pi}{3} i} \quad z_1 = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{5\pi}{6} i} \quad z_2 = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{4\pi}{3} i} \quad z_3 = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{11\pi}{6} i}$$

2. $|z - 1 + i| < 2,\ \operatorname{Arg} z > \frac{\pi}{2}$ bölgesi $1 - i$ merkezli 2 yarıçaplı (açık) dairenin $\operatorname{Arg} z > \frac{\pi}{2}$ koşulunu sağlayan noktalarından oluşur. $\operatorname{Arg} z > \frac{\pi}{2}$, kompleks düzlemde, $x \leq 0,\ y > 0$ şeklindeki noktalardır. Belirtilen küme yanda çizilmiştir. (Negatif x-ekseni üzerindeki sınır noktaları dahil, diğer sınır nıktaları dahil değil)



3. $f(z) = f(x + y\, i) = x^3 - (y^3 - 3y)\, i.\ u(x,y) = x^3,\ v(x,y) = y^3 - 3y$
$u_x = 3x^2,\ u_y = 0,\ v_x = 0,\ v_y = 3y^2 - 3$ Her biri tüm $\mathbb{R}^2$ de süreklidir. Bu nedenle, f, sadece, Cauchy-Riemann denklemlerinin sağlandığı noktalarda türevlenebilir, diğer noktalarda türevlenemez.

$$u_x = 3x^2 = 3y^2 - 1 = v_y \quad u_y = 0 = -0 = -v_x$$

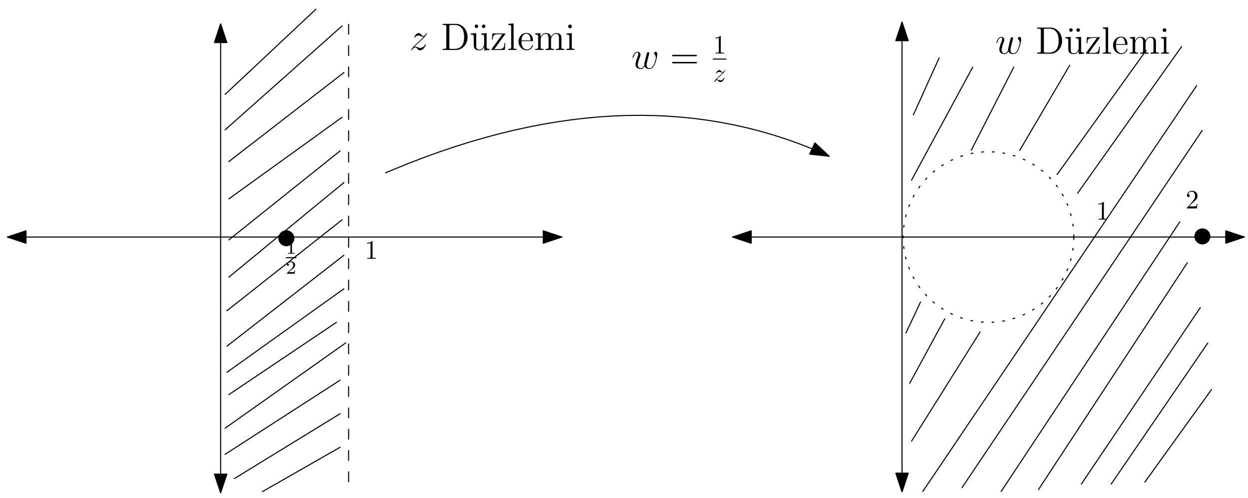
Bu denklemler, sadece, $x^2 + y^2 = 1$ (birim) çemberi üzerinde sağlanır. Bu nedenle, f, sadece birim çember üzerindeki noktalarda türevlenebilirdir. z_0 birim çember üzerinde bir nokta olsun. z_0 ın her komşuluğunda (z_0 merkezli her dairede), $|z| \neq 1$ şeklinde, yani birim çember üzerinde olmayan noktalar vardır. Bu noktalarda f türevlenemediği için, f, o noktada analitik olamaz. f hiç bir noktada analitik değildir.

4. $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y + y^4$ fonksiyonunun tüm düzlemde harmonik olduğunu gösteriniz ve harmonik eşleniğini bulunuz. $u_{xx} = 12x^2 - 12y^2,\ u_{yy} = -12x^2 + 12y^2$ (her ikisi de sürekli) olduğundan $u_{xx} + u_{yy} = 0$ olduğu açıktır.
$v(x,y),\ u$ nun (bir) harmonik eşleniği olsun. $v_y = u_x = 4x^3 - 12xy^2$ ve
$v_x = -u_y = 12x^2y - 1 - 4y^3$ olması gerekli ve yeterlidir. Birinci eşitlikten,
$v(x,y) = \int (4x^3 - 12xy^2)\, dy = 4x^3y - 4xy^3 + \phi(x)$ olmalıdır. x e göre kısmi türev alarak:

$v_x = 12xy^2 - 4y^3 + \phi'(x) = 12xy^2 - 4y^3 - 1$ olmalıdır. Buradan da $\phi'(x) = -1$ ve $\phi(x) = -x + C$ bulunur.
$v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 - x + C$ (C bir sabit) olmak zorundadır

5. Kısa (geometrik) Çözüm:
$\frac{1}{z}$ bir Möbius dönüşümü olduğu için B yi sınırlayan doğrular, doğru ya da çembere dönüşür. Sanal eksen 0 dan geçtiği (ve 0 ∞ a gönderildiği için) (ve $z \neq 0$ $\operatorname{Re} z = 0$ ise $\operatorname{Re}\frac{1}{z} = 0$ olduğu için) kendisine dönüşür. $\operatorname{Re} z = 1$ doğrusu da (0 dan geçmediği için) 0 dan ve 1 den geçen bir çembere dönüşür. Bu çemberin merkezinin $\frac{1}{2}$ ve yarıçapının da $\frac{1}{2}$ olacağı (bir nokta seçerek veya açıların korunacağını kullanarak) görülür.

Uzun Çözüm: $z = x + iy,\ w = u + iv$ olsun.
$z = \frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{|w|^2}, x = \frac{u}{u^2+v^2},\ y = \frac{-v}{u^2+v^2}$ olur. $x = 0$ doğrusu $u = 0$ doğrusuna, $\operatorname{Re} z = x = 1$ doğrusu da $\frac{u}{u^2+v^2} = 1$ eğrisine (çemberine) dönüşür.
$\frac{u}{u^2+v^2} < 1$ düzenlenerek (ve $u > 0$ olduğu kullanılarak) $(u - \frac{1}{2})^2 + v^2 > (\frac{1}{2})^2$ elde edilir.
Bu nedenle B bölgesi w düzleminde, sanal eksenin sağında ($u > 0$) ve $(u - \frac{1}{2})^2 + v^2 = (\frac{1}{2})^2$ çemberinin dışına gönderilir. (Bu bölgedeki her nokta da B deki bir noktasının görüntüsüdür)



6. $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = i$ denklemi düzenlenirse ($u = e^{iz}$ olmak üzere) $u^2 - 2i\,u + 1 = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümleri $u = (1 \pm \sqrt{2})\,i$ sayılarıdır. $u = (1+\sqrt{2})\,i$ için $\log u = \ln(1+\sqrt{2}) + (\frac{\pi}{2} + 2n\pi)i$ $(n \in \mathbb{Z})$ olduğundan $iz = \ln(1+\sqrt{2}) + (\frac{\pi}{2} + 2n\pi)i$ $(n \in \mathbb{Z})$ olduğunda (ve yalnızca bu durumda) $e^{iz} = (1+\sqrt{2})\,i$ olur.
Kısaca her $z = (\frac{\pi}{2} + 2n\pi) - \ln(1+\sqrt{2})\,i$ $(n \in \mathbb{Z})$ için $\cos z = i$ olur. (Diğer u değerinin seçilmesi durumunda da yine sonsuz çoklukta çözüm edilir.)

7. $(\sqrt{3}+i)^i = e^{i\,\log(\sqrt{3}+i)}$
$\log(\sqrt{3}+i) = \ln|\sqrt{3}+i| + \arg(\sqrt{3}+i)\,i = \ln 2 + (\frac{\pi}{6} + 2n\pi)\,i$ $(n \in \mathbb{Z})$ olduğundan,

$$(\sqrt{3}+i)^i = e^{-(\frac{\pi}{6}+2n\pi)+\ln 2\,i} = e^{-(\frac{\pi}{6}+2n\pi)}(\cos(\ln 2) + i\,\sin(\ln 2))\ (n \in \mathbb{Z})$$

olur. Üslü sayının esas değeri, bu tanımda, logaritmanın esas değeri kullanarak bulunan değerdir. $\text{Arg}(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{6}$ olduğundan, $(\sqrt{3}+i)^i$ sayısının esas değeri

$$e^{-\frac{\pi}{6}}(\cos(\ln 2) + i\,\sin(\ln 2)) \quad \text{dir.}$$

8. $U(r,\theta) = \sqrt[3]{r}\,\cos\frac{\theta}{3},\ V(r,\theta) = \sqrt[3]{r}\,\sin\frac{\theta}{3}$ dir.
$U_r = \frac{1}{3}r^{-\frac{2}{3}}\,\cos\frac{\theta}{3},\ U_\theta = -\frac{1}{3}r^{\frac{1}{3}}\,\sin\frac{\theta}{3},\ V_r = \frac{1}{3}r^{-\frac{2}{3}}\,\sin\frac{\theta}{3},\ V_\theta = \frac{1}{3}r^{\frac{1}{3}}\,\cos\frac{\theta}{3}$
olup tüm kısmi türevler, (bu bölgede) süreklidir.

$$U_r = \frac{1}{3}r^{-\frac{2}{3}}\,\cos\frac{\theta}{3} = \frac{1}{r}\,V_\theta,\ V_r = \frac{1}{3}r^{-\frac{2}{3}}\,\sin\frac{\theta}{3} = -\frac{1}{r}\,U_\theta$$

(Kutupsal Koordinatlarda Cauchy-Riemann denklemleri) sağlandığı için, f belirtilen bölgede türevlenebilirdir ve bölgenin her noktasında türevlenebilir (ve bölge açık küme) olduğundan bu bölgede analitik bir fonksiyondur.

$$f'(re^{i\theta}) = e^{-i\theta}\,(U_r + i\,V_r) = \frac{1}{3}r^{-\frac{2}{3}}\,e^{-\frac{2}{3}\theta\,i} \quad \text{olur.}$$