MT 342 TOPOLOJİ BÜTÜNLEME SINAVI ÇÖZÜMLER

1.
   - $\operatorname{Int} A \subseteq A$ olduğundan (her fonksiyon için) $f(\operatorname{Int} A) \subseteq f(A)$ olur. f açık dönüşüm olduğu (ve $\operatorname{Int} A, X$ de açık küme olduğu)için $f(\operatorname{Int} A)$, Y de bir açık kümedir. $\operatorname{Int} f(A)$, $f(A)$ içindeki en büyük açık küme olduğundan, $f(\operatorname{Int} A) \subseteq \operatorname{Int} f(A)$ olur.
   - Birinci Çözüm:
     $y \in \operatorname{Int} f(A)$ olsun. $y \in f(A)$ olur. Bu nedenle $y = f(x)$ o.ş. (en az) bir $x \in A$ vardır. $\operatorname{Int} f(A) \in \tau_Y$ (açık küme) ve f, $(\tau_X - \tau_Y)$ sürekli olduğundan, $V = f^{-1}(\operatorname{Int} f(A)) \in \tau_X$ olur. Ayrıca $x \in V$ olur. ($\operatorname{Int} f(A) \subseteq f(A)$ olduğu için) $V \subseteq f^{-1}(f(A))$ olur. $f^{-1}(f(A)) = A$ kabulunden $V \subseteq A$ elde edilir. $V \in \tau_X$ (açık küme) ve $\operatorname{Int} A$, A içindeki en büyük açık küme olduğu için $V \subseteq \operatorname{Int} A$ bulunur. Buradan da $x \in \operatorname{Int} A$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla $y = f(x) \in f(\operatorname{Int} A)$ olur. Bu da $\operatorname{Int} f(A) \subseteq f(\operatorname{Int} A)$ olduğu da gösterilmiş olur.
     İkinci Çözüm:
     Önce (her $f : X \to Y$ fonksiyonu ve her $B \subseteq Y$ için) $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$ olduğunu gözlemleyelim (ispatı çok kolay. Siz yapın)
     $U = \operatorname{Int} f(A)$ olsun. U nun açık küme ($U \in \tau_Y$) olduğunu ve $U \subseteq f(A)$ olduğunu biliyoruz. $V = f^{-1}(U)$ olsun. f, $\tau_X - \tau_Y$ sürekli olduğundan, V açık ($V \in \tau_X$) olur. (f^{-1} içermeleri koruduğu için) $V = f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(f(A)) = A$ olur. V açık olduğu için $V \subseteq \operatorname{Int} A$ olur.
     (f içermeleri koruduğu için) $f(V) \subseteq f(\operatorname{Int} A)$ elde edilir. (Yukarıdaki gözlemden)
     $f(V) = f(f^{-1}(U)) = U \cap f(X) = U \quad (U \subseteq f(A) \subseteq f(X)$ idi) olur. Dolayısıyla
     $\operatorname{Int} f(A) \subseteq f(\operatorname{Int} A)$ olduğu da gösterilmiş olur.

2. (a) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (\sqrt[5]{y}, \frac{x+1}{2})$ fonksiyonu f nin ters fonksiyonudur (Kontrol ediniz!). Dolayısıyla f, $1-1$ ve örtendir.

   (b) $F \subseteq Y = \mathbb{R}^2$ kapalı bir küme olsun. ($\tau_Y = \tau_{\text{ts}}$ olduğundan) F sonlu bir küme veya $\mathbb{R}^2$ dir. Her fonksiyon için $f^{-1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$, $\quad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ dir. $F = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ ise (f, 1-1 ve örten olduğu için) $f^{-1}(F) = \{f^{-1}(p_1), f^{-1}(p_2), \ldots, f^{-1}(p_n)\} = \{g(p_1), g(p_2), \ldots, g(p_n)\}$ olur. Her üç durumda da ($\tau_X = \tau_{\text{ts}}$ olduğundan) $f^{-1}(F)$ kapalı bir kümedir. Bu da f nin $\tau_X - \tau_Y$ sürekli olduğunu göstermek için yeterlidir.

   (c) $F \subseteq X = \mathbb{R}^2$ kapalı bir küme olsun. ($\tau_X = \tau_{\text{ts}}$ olduğundan) F sonlu bir küme veya $\mathbb{R}^2$ dir. Her fonksiyon için $f(\emptyset) = \emptyset$ dir, f örten olduğu için $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ olur. $F = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ ise $f(F) = \{f(p_1), f(p_2), \ldots, f(p_n)\}$ olur. Her üç durumda da ($\tau_Y = \tau_{\text{ts}}$ olduğundan) $f(F)$ kapalı bir kümedir. Bu da f nin kapalı dönüşüm olduğunu gösterir.

   Bu üç özelliğinden dolayı f bir homeomorfizmadır.

3. (a) $\mathfrak{B}' = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathfrak{B}_1,\ B_2 \in \mathfrak{B}_2\}$ idi.
   $\mathfrak{B}_1$, τ_X için bir baz olduğundan, $\mathfrak{B}_1 \subseteq \tau_X$ olur.
   $\mathfrak{B}_2$, τ_Y için bir baz olduğundan, $\mathfrak{B}_2 \subseteq \tau_Y$ olur. Dolayısıyla

   $$\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B} = \{U \times V : U \in \tau_X,\ V \in \tau_Y\}$$

   olur. (Çarpım topolojisinin tanımından) $\mathfrak{B}$, $\tau_{\text{çarpım}}$ için bir baz olduğundan, $\mathfrak{B} \subseteq \tau_{\text{çarpım}}$ dir. Bu iki içermeden, $\mathfrak{B}' \subseteq \tau_{\text{çarpım}}$ elde edilir.

   (b) $W \in \tau_{\text{çarpım}}$, $p(x,y) \in W$ olsun.
   $\mathfrak{B} = \{U \times V : U \in \tau_X,\ V \in \tau_Y\}$, $\tau_{\text{çarpım}}$ için bir baz olduğundan, $p(x,y) \in U \times V$, $U \times V \subseteq W$ o.ş. $U \in \tau_X$, $V \in \tau_Y$ vardır. $p(x,y) \in U \times V$ olduğundan $x \in U$, $y \in V$ olur.
   $\mathfrak{B}_1$, τ_X için bir baz olduğundan, $x \in B_1$, $B_1 \subseteq U$ o.ş. bir $B_1 \in \mathfrak{B}_1$ vardır.
   $\mathfrak{B}_2$, τ_X için bir baz olduğundan, $y \in B_2$, $B_2 \subseteq V$ o.ş. bir $B_2 \in \mathfrak{B}_2$ vardır.
   $B_1 \times B_2 \in \mathfrak{B}'$, $p(x,y) \in B_1 \times B_2$ ve $B_1 \times B_2 \subseteq U \times V \subseteq W$ olduğu bunlardan hemen görülür.

   Bu iki özellik, $\mathfrak{B}'$ nün $\tau_{\text{çarpım}}$ için bir baz olması için sağlaması gereken koşullardır.

4. (a)
   - $\bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B = X$ olduğunu gösterelim. $\forall B \in \mathfrak{B}$ için $B \subseteq \mathbb{R}$ olduğundan $\bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B \subseteq \mathbb{R} = X$ aşikardır. $x \in \mathbb{R}$ olsun.

$$a = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{x}{2} & x > 0 \\ 2|x| & x < 0 \end{cases}$$ alalım. Her durumda, $a > 0$ ve $x \in (-a, 2a]$ ve $(-a, 2a] \in \mathfrak{B}$ olur.

Dolayısıyla, $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B$ olur.

- $B_1, B_2 \in \mathfrak{B},\ x \in B_1 \cap B_2$ olsun. $B_1 = (-a, 2a],\ B_2 = (-b, 2b]$ o.ş. $a, b > 0$ sayıları vardır. $c = \min\{a, b\}$ olsun. $c > 0$ ve $B_1 \cap B_2 = (-c, 2c]$ olur. Dolayısıyla $B_3 = (-c, 2c]$ için $B_3 \in \mathfrak{B},\ x \in B_3,\ B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ olur.

Bu iki özelliğinden dolayı $\mathfrak{B}$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir topolojinin bir bazıdır.

(b) $(-1, 2) = \bigcup_{0<a<1} (-a, 2a]$ (ve her $0 < a < 1$ için $(-a, 2a] \in \mathfrak{B} \subseteq \tau$ olduğundan), topolojinin 3. aksiyomundan $(-1, 2) \in \tau$ (yani açık bir küme) olur.

5. $X = \{f \in \mathbb{R}[x] : \operatorname{der} f(x) \leq 3\}$
$d(f, g) = \max\{|f(0) - g(0)|, |f'(0) - g'(0)|, |f''(0) - g''(0)|, |f'''(0) - g'''(0)|\}$ olmak üzere:

(a) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $|x| \geq 0$ olduğu için
$|f(0) - g(0)| \geq 0,\ |f'(0) - g'(0)| \geq 0,\ |f''(0) - g''(0)| \geq 0,\ |f'''(0) - g'''(0)| \geq 0$ olur. Dolayısıyla $d(f, g) \geq 0$ olur.
$f = g$ ise $f(0) = g(0),\ f'(0) = g'(0),\ f''(0) = g''(0),\ ,\ f'''(0) = g'''(0)$ olacağından
$d(f, g) = \max\{0, 0, 0, 0\} = 0$ olur.
$d(f, g) = 0$ olsun. $f(0) = g(0),\ f'(0) = g'(0),\ f''(0) = g''(0),\ ,\ f'''(0) = g'''(0)$ olur. $h = f - g$ olsun. $h(0) = 0,\ h'(0) = 0,\ h''(0) = 0,\ h'''(0) = 0$ olur. h, derecesi en çok 3 olan bir polinom olduğu için bu eşitliklerden $h = 0$ olduğu yani, $f = g$ olduğu çıkar.

(b)

$$\begin{aligned} d(g, f) &= \max\{|g(0) - f(0)|, |g'(0) - f'(0)|, |g''(0) - f''(0)|, |g'''(0) - f'''(0)|\} \\ &= \max\{|f(0) - g(0)|, |f'(0) - g'(0)|, |f''(0) - g''(0)|, |f'''(0) - g'''(0)|\} = d(f, g) \end{aligned}$$

(c) $f, g, h \in X$ olsun. Kısa olması için $A = d(f, g),\ B = d(g, h)$ kullanalım. d nin tanımından:
$A \geq |f(0) - g(0)|,\ A \geq |f'(0) - g'(0)|,\ A \geq |f''(0) - g''(0)|,\ A \geq |f'''(0) - g'''(0)|$ olur.
Aynı şekilde:
$B \geq |g(0) - h(0)|,\ B \geq |g'(0) - h'(0)|,\ B \geq |g''(0) - h''(0)|,\ B \geq |g'''(0) - h'''(0)|$ olur.
$\mathbb{R}$ deki üçgen eşitsizliğinden (ve yukarıdaki eşitsizliklerden) :
$|f(0) - h(0)| \leq |f(0) - g(0)| + |g(0) - h(0)| \leq A + B$
$|f'(0) - h'(0)| \leq |f'(0) - g'(0)| + |g'(0) - h'(0)| \leq A + B$
$|f''(0) - h''(0)| \leq |f''(0) - g''(0)| + |g''(0) - h''(0)| \leq A + B$
$|f'''(0) - h'''(0)| \leq |f'''(0) - g'''(0)| + |g'''(0) - h'''(0)| \leq A + B$
olduğundan:

$$\begin{aligned} d(f, h) &= \max\{|f(0) - h(0)|, |f'(0) - h'(0)|, |f''(0) - h''(0)|, |f'''(0) - h'''(0)|\} \\ &\leq A + B = d(f, g) + d(g, h) \end{aligned}$$

elde edilir.

6. $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$d_X(x, y) = |x - y| < \delta \text{ iken } d_Y(e^{ix}, e^{iy}) = |e^{ix} - e^{iy}| < \varepsilon$$

olacak şeklide (sadece ε a bağlı) bir $\delta > 0$ sayısı bulmalıyız.

$$\begin{aligned}
|e^{ix} - e^{iy}| &= |(\cos x - \cos y) + i(\sin x - \sin y)| = \sqrt{(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2} \\
&= \sqrt{2 - 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y)} = \sqrt{2 - 2\cos(x - y)} \\
&= \sqrt{4\left(\frac{1 - \cos(x - y)}{2}\right)} = \sqrt{4\sin^2\left(\frac{x - y}{2}\right)} = 2\left|\sin\frac{x - y}{2}\right| \\
&\leq 2\left|\frac{x - y}{2}\right| = |x - y| = d(x, y) < \delta
\end{aligned}$$

olduğundan, $\delta = \varepsilon$ almak yeterlidir. $\delta > 0$ olur ve $d_X(x, y) < \delta$ iken $d_Y(e^{ix}, e^{iy}) < \varepsilon$ olacağı yukarıda gösterilmiştir.