TOPOLOJİ PROBLEMLERİ
VII

1. (X, d) bir metrik uzay, $\tau = \{U \subseteq X : \forall x \in U,\ B_r(x) \subseteq U$ o.ş. (en az bir) $r > 0$ gerçel sayısı vardır$\} \subseteq 2^X$ olsun. Aşağıdakileri gösteriniz:
   (a) τ, X üzerinde bir topolojidir.
   (b) τ, d nin X üzerinde tanımladığı metrik topolojiye eşittir.

2. $X = C([a, b]; \mathbb{R}) = \{f \mid f : [a, b] \to \mathbb{R},\ f$ sürekli$\}$ ve $d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$ olsun. d nin X üzerinde bir metrik olduğunu gösterin.

3. (X, d) bir metrik uzay $x \in X$, $r \geq 0$ olsun. $F_r(x) = \{y \in X : d(y, x) \leq r\}$ (bu notasyon standart değildir) olsun.
   (a) $F_r(x)$ nin (metriğin tanımladığı topolojiye göre) kapalı bir küme olduğunu gösterin.
   (b) d ayrık metrik ve $r = 1$ ise $\overline{B_r(x)} \neq F_r(x)$ olduğunu gösterin.
   (c) Her metrik uzayda $\overline{B_0(x)} \neq F_0(x)$ olduğunu gösterin.
   (d) $r > 0$ ve $d(x, y) = r$ olsun. $y \in \overline{B_r(x)} \iff y \in (B_r(x))'$ olduğunu gösterin

4. (X, d) bir metrik uzay ve $x, y \in X$, $x \neq y$ olsun. $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U, V açık kümelerinin varlığını gösteriniz. (Bu özelliğe, Hausdorff özelliği denir.) İpucu $r = \frac{1}{2} d(x, y)$ olmak üzere $U = B_r(x)$, $V = B_r(y)$ nin bu koşulları sağladığını gösteriniz.

5. $\mathbb{R}$ üzerindeki sağ ışın, sol ışın, sonlu tümleyenli topolojiklerin metrik topoloji **olmadığını** gösterin. (ipucu: bu topolojilerin, Hausdoff özelliğine sahip olmadıklarını gösterin)

6. (X, d) bir metrik uzay ve $\emptyset \neq A \subseteq X$, $d' = d|_{A \times A} : A \times A \to \mathbb{R}$, ($d$ nin kısıtlaması) olsun.
   (a) d' nün A üzerinde bir metrik olduğunu gösteriniz.
   (b) τ, X üzerinde d nin tanımladığı (metrik) topoloji ve τ', A üzerinde d' nün tanımladığı (metrik) topoloji ve τ_A, A üzerindeki (τ nun tanımladığı) alt uzay topolojisi olmak üzere, $\tau' = \tau_A$ olduğunu gösteriniz. (İpucu: $\mathfrak{B}' = \{B_r(x) \cap A : x \in X, r > 0\}$ ailesinin hem τ' hem de τ_A için baz olduğunu gösterin.)