MT 342 TOPOLOJİ DÖNEM SONU SINAVI

SORULAR

1. (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathfrak{B}$, τ için bir baz ve $\emptyset \neq A \subseteq X$; τ_A, A üzerindeki alt uzay (indirgenmiş) topoloji olsun. $\mathfrak{B}' = \{B \cap A : B \in \mathfrak{B}\}$ olarak tanımlayalım. $\mathfrak{B}'$ nün τ_A için bir baz olduğunu gösterin.

2. (X, τ_X), (Y, τ_Y) iki topolojik uzay olsun. (Her ikisinde de çarpım topolojisi kullanıldığında) $X \times Y$ ile $Y \times X$ in homeomorfik olduğunu gösterin. (Yol Gösterme: $f(x, y) = (y, x)$ in bir homeomorfizma olduğunu gösterin. Çarpım topolojisinin bazından yararlanınız)

3. (X, d) bir metrik uzay ve τ, X üzerinde d metriğinin tanımladığı topoloji olsun. $\mathfrak{B} = \{B_q(x) : q \in \mathbb{Q}\}$ olsun. $\mathfrak{B}$ nin τ için bir baz olduğunu gösterin. (Yol Gösterme: Her açık aralıkta en az bir rasyonel sayının var olduğunu kullanın)

4. $X = \{f \in \mathbb{R}[x] : \text{der}\, f(x) \leq 3\}$ (derecesi en çok 3 olan polinomların kümesi) olsun. $d(f, g) = \sum_{n=1}^{4} |f(n) - g(n)|$ olarak tanımlansın. d nin X üzerinde bir metrik olduğunu gösterin.

5. $X = \mathbb{R}^2$, $d_X(p, q) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$, $(p(x_1, y_1), q(x_2, y_2))$ $\quad Y = \mathbb{R}$, $d_Y(x, y) = |x - y|$, $f : X \to Y$, $f(x, y) = x - 2y$ olsun. f nin düzgün sürekli olduğunu gösterin.

6. (X, d) bir metrik uzay $a \in X, r > 0$ olsun. $F = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$ kümesinin (d nin X üzerinde tanımladığı metrik topolojiye göre) kapalı bir küme olduğunu gösterin. (Yol Gösterme: üçgen eşitsizliğini kullanarak ($x \in F^c$ ise $B_{r'}(x) \subset F^c$ olacak şekilde bir $r' > 0$ sayısı bularak) F^c nin bir açık küme olduğunu gösterin)

$\mathbb{R}$: Gerçel (Reel) sayılar $\quad \mathbb{Q}$: Rasyonel Sayılar,
((X, d) bir metrik uzay olmak üzere) $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$

Başarılar