MT 352 SONLU MATEMATİK (2011) FİNAL ÇÖZÜMLER

1. $|A| = 6,\ B = \{a, b, c, d\}$ olsun.

   (a) 6 elemanlı bir kümeden 3 elemanlı bir kümeye örten fonksiyonların sayısı$=\sum_{i=0}^{3}(-1)^i\binom{3}{3-i}(3-i)^6 = 3!S(6,3)$ dir. B nin 3 elemanlı $\binom{4}{3} = 4$ tane alt kümesi olduğundan $4 \cdot 3!S(6,3) = 24S(6,3)$ tane bu tür fonksiyon vardır.

   (b) $f(A) = \{a, b, c\}$ olacak şekilde $\sum_{i=0}^{3}(-1)^i\binom{3}{3-i}(3-i)^6 = 3!S(6,3)$ tane fonksiyon ve $f(A) = B$ olacak şekilde $\sum_{i=0}^{4}(-1)^i\binom{4}{4-i}(4-i)^6 = 4!S(6,4) = 24S(6,4)$ tane fonksiyon olduğundan ve bu kümeler ayrık olduğundan bu tür fonksiyonların sayısı $6S(6,3) + 24S(6,4)$ olur.

2. (a) $S(4,2) + S(4,3) = 7 + 6 = 13$ farklı şekilde. ($S(4,2)$: iki sayının çarpımı olarak yazılışların sayısı, $S(4,3)$: üç sayının çarpımı olarak yazılışların sayısı)

   (b) Sayının asal çarpanlarını iki kutuya (her iki kutu da boş olmayacak şekilde) dağıtma problemi. Sadece bir çarpan çift olacak şekilde çarpanlara ayrılma: $S(5,2)$, (4 asalmış gibi tek olarak bir kutuya konacak) Her iki çarpan da çift olacak şekilde: Önce tek asallar 2 kutuya (bir kutu boş da kalabilir) $1 + S(4,2)$ şekilde dağıtılır, daha sonra her kutuya birer tane 2 konur. Cevap: $S(5,2) + S(4,2) + 1 = 23$

3. (a) n tane 1 olduğundan determinatın sıfırdan farklı olması için her satır ve her sütunda tek bir 1 olmalıdır. Birinci satırda istediğimiz sütuna 1 (diğer sütunlara 0) yazarız (n seçenek) , 2. satırda **farklı bir sütuna** 1 yazılır (diğer sütunlara 0 yazılır)($n-1$ seçenek), 3. satırda öncekilerden **farklı bir sütuna** 1 (diğer sütunlara 0) yazılır ($n-2$ seçenek), ... son satıra gelindiğinde elimizde tek bir 1 kalır ve içinde 1 olmayan tek sütun kalmıştır. Cevap: $n!$

   (b) Determinant formülünden yazılan matrisin determinantı ± 1 olur. Bu matrislerin kümesini, determinatı 1 olanlar ve determinantı -1 olanlar şeklinde iki (ayrık) alt kümeye bölersek, 1. satır ve 2. satırın yer değiştirmesi (sadece burada $n > 1$ gerekli) bu iki küme arasında 1-1 bir eşleme oluşturur . Dolayısıyla iki küme aynı sayıda elemana sahiptir. Dolayısıyla, determinantı 1 olanların sayısı$=\frac{n!}{2}$ olur.

4. (a) $S \subset \{1, 2, \ldots, 42\}$, $|S| = 10$ $A \subset S$, $|A| = 3$ için n_A, A nın elemanlarının toplamı olsun. $6 \le n_A \le 40 + 41 + 42 = 123$ olur. S nin 3 elemanlı $\binom{10}{3} = 120$ alt kümesi vardır. B (S nin 3 elemanlı alt kümelerinin kümesi) den $C = \{6, 7, \ldots, 123\}$ kümesine $A \to n_A$ fonksiyonu ($|B| = 120$, $|C| = 118$ olduğundan, Güvercin yuvası prensibinden) 1-1 olamaz. Dolayısıyla S nin, elemanlarının toplamı aynı olan, 3 elemanlı iki (farklı) alt kümesi vardır.

   (b) (yukarıda bulunan) $n_A = n_{A'}$ olsun. $A_1 = A \backslash (A \cap A')$, $A_2 = A' \backslash (A \cap A')$ olsun. A_1 ve A_2 ayrık ve $n_{A_1} = n_{A_2}$ olur.

5. A üzerinde, birim elemanı e olan 5^{16} tane ikili işlem vardır. Bunlardan 5^{10} tanesi değişmeli olduğundan $5^{16} - 5^{10}$ tanesi değişmeli değildir.

6. (a) x^2yz nin:
   $(2x - y + 3z + a)^5$ deki katsayısı$=\binom{5}{2,1,1,1}2^2(-1)^1 3^1 a^1$,
   $(x + 3y - z)^4$ deki katsayısı$=\binom{4}{2,1,1}1^2 3^1(-1)^1$ olur
   Bunları eşitleyip a yı çözersek, $a = \frac{-36}{-720} = \frac{1}{20}$ olmalıdır.

   (b) Her $x > 0$ için $\ln x \le x - 1 < x$ olduğundan $x = \sqrt[5]{n}$, ($n \in \mathbb{Z}^+$) alınarak (her $n \in \mathbb{Z}^+$ için) $\frac{1}{5}\ln n = \ln\sqrt[5]{n} < \sqrt[5]{n}$ buradan da (her $n \in \mathbb{N}$ için) $\ln n < 5\sqrt[5]{n}$ bulunur. Bu da $\ln n \in O(\sqrt[5]{n})$ olduğunu gösterir.