MT 352 Sonlu Matematik ARA SINAV ÇÖZÜMLER

1. KARAHİSAR sözcüğü veriliyor. Bu sözcüğün harflerinden:

   (a) 8 harfli kelimeler+9 harfli kelimeler= $\binom{8}{2,2,1,1,1,1}+\binom{8}{3,1,1,1,1,1}+\binom{4}{1}\binom{8}{3,2,1,1,1}+\binom{9}{3,2,1,1,1,1}$(A çıkarılmış+R çıkarılmış+diğer harflerden biri çıkarılmış+Tüm harfler)

   (b) $\binom{4}{3}\binom{5}{2,1,1,1}\binom{6}{3}+\binom{6}{2,1,1,1,1}\binom{7}{2}+\binom{5}{1,1,1,1,1}\binom{6}{3}$ (3A-2R içerenler+2A-2R içerenler+3A-1R içerenler)

   (c) $4!\binom{5}{3}\binom{8}{2}+4!\binom{5}{1}\binom{6}{2}$ (KHİS harflerinin sıralaması×R lerin aralara yerleştirilmesi×A lerin aralara yerleştirilmesi+KHİS harflerinin sıralaması×RR nin araya yerleştirilmesi×A ların (biri R ler arasına gelmek koşulu ile) aralara yerleştirilmesi)

2. 5 elma, 6 portakal ve 7 erik 4 çocuğa:

   (a) Koşulsuz: $\binom{5+4-1}{4-1}\binom{6+4-1}{4-1}\binom{7+4-1}{4-1}=\binom{8}{3}\binom{9}{3}\binom{10}{3}$ şekilde

   (b) (Önce her çocuğa her meyvadan birer tane verilir. kalan meyvalar koşulsuz dağıtılır.) $\binom{1+4-1}{4-1}\binom{2+4-1}{4-1}\binom{3+4-1}{4-1}=\binom{4}{3}\binom{5}{3}\binom{6}{3}$

   (c) (Önce diğer meyvalar koşulsuz dağıtılıp, tüm portakallar dört çocuktan birine verilir.) $\binom{5+4-1}{4-1}\binom{7+4-1}{4-1}\binom{4}{1}=4\binom{8}{3}\binom{10}{3}$

3. (a) Bir tane 4 (diğerleri 0):$\binom{5}{1}=\binom{5}{1,4}$ tane
   Bir tane 3 bir tane 1 (diğerleri 0):$\binom{5}{1}\binom{4}{1}=\binom{5}{1,1,3}$
   İki tane 2 (diğerleri 0):$\binom{5}{2}=\binom{5}{2,3}$
   Bir tane 2 iki tane 1 (diğerleri 0):$\binom{5}{1}\binom{4}{2}=\binom{5}{1,2,2}$
   Dört tane 1 (diğeri 0):$\binom{5}{4}=\binom{5}{4,1}$
   Toplam: $\binom{5}{1}+\binom{5}{1}\binom{4}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{1}\binom{4}{2}+\binom{5}{4}=\binom{5}{1,4}+\binom{5}{1,1,3}+\binom{5}{2,3}+\binom{5}{4,1}$

   (b) $x\in\mathbb{N},\ x\mid a, x\mid b$ olsun. Bölmenin özelliklerinden $x\mid a-b$ olur.
   $x\in\mathbb{N},\ x\mid a,\ x\mid(b-a)$ olsun. Bölmenin özelliklerinden $x\mid b$ olur. Dolayısıyla

   $$\{x\in\mathbb{N}:x\mid a,\ x\mid b\}=\{x\in\mathbb{N}:x\mid a,\ x\mid(b-a)\}$$

   ve $(a,b)=\min\{x\in\mathbb{N}:x\mid a,\ x\mid b\}=\min\{x\in\mathbb{N}:x\mid a,\ x\mid(b-a)\}=(a,a-b)$ elde edilir.

4. (a) x^2y^2 sadece, $(x+y)^3$ ün açılımındaki x^2y ile $(x+2y-3z+5)^4$ nin açılımındaki y li teriminin çarpımından ve $(x+y)^3$ ün açılımındaki xy^2 terimi ile $(x+2y-3z+5)^4$ nin açılımındaki x li teriminin çarpımından oluşturulabilir. Sadece bize göre önemli terimleri yazarsak:
   $(x+y)^3=\binom{3}{1}x^2y+\binom{3}{2}xy^2+\cdots,$
   $(x+2y-z+5)^4=\binom{4}{0,1,0,3}(2y)5^3+\binom{4}{1,0,0,3}x5^3+\cdots$
   Dolayısıyla katsayı=$\binom{3}{1}\binom{4}{0,1,0,3}\cdot 2\cdot 5^3+\binom{3}{2}\binom{4}{1,0,0,3}\cdot 5^3$ olur.

   (b) $x_0=7, x_1=12,\ x_{n+2}=x_{n+1}+(x_{n+1}-x_n)=2x_{n+1}-x_n \quad (n\geq 0)$

5. (a) $y_1=x_1-3,\ y_2=x_2-4,\ y_3=x_3,\ y_4=x_4,\ y_5=x_5,\ y_6=x_6$ olsun. $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6=25$ ve $y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6\geq 0$ olacağından bu denklemin tamsayı çözümlerinin sayısı $\binom{30}{5}$ dir. Dolayısıyla, $x_1+x_2+\cdots+x_6=32$ denkleminin $x_1\geq 3$ ve $x_2\geq 4,\ x_3,x_4,x_5,x_6\geq 0$ koşullarını sağlayan $\binom{30}{5}$ tane çözümü vardır.

   (b) Öklid algoritması veya deneme ile $2\cdot 6-1\cdot 10=2=(6,10)$ ve $1=8\cdot 2+(-1)\cdot 15=(2,15)$ olur.
   $1=8(2\cdot 6-1\cdot 10)-1\cdot 15=16\cdot 6-8\cdot 10-1\cdot 15$ olduğundan
   $6(16\cdot 113)+10(-8\cdot 113)+15((-1)\cdot 113)=113$ olur.
   $x=16\cdot 113,\ y=-8\cdot 113,\ z=-113$ bir çözümdür.