Sonlu Bir Kümeden Sonlu Bir Kümeye Örten Fonksiyonların Sayısı

$|A| = m$, $|B| = n$ olsun. A dan B ye örten olmayan fonksiyonları sayalım. $B = \{1, 2, \ldots, n\}$ varsayabiliriz. ($1 \le k \le n$ olmak üzere) $B_k = B \setminus \{k\}$ olsun. X, Y iki küme ise, Y^X, X ten Y ye tüm fonksiyonları göstersin. A dan B ye **örten olmayan** tüm fonksiyonların kümesinin

$$\bigcup_{i=1}^{n} (B_i)^A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i, \quad \left(C_i = (B_i)^A\right)$$

olduğu aşikardır. Ayrıca:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} C_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |C_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |C_i \cap C_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |C_i \cap C_j \cap C_k| - \cdots + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^{n} C_i \right| \tag{1}$$

olur.

$$C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \cdots C_{i_k} = (B_{i_1})^A \cap (B_{i_2})^A \cdots \cap \left(B_{i_k}\right)^A = \left(B_{i_1} \cap B_{i_2} \cdots B_{i_k}\right)^A$$

olduğundan ve (\, fark kümesini göstermek üzere)

$$B_{i_1} \cap B_{i_2} \cdots \cap B_{i_k} = B \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$$

olduğundan ($i_1, i_2, \ldots, i_k$ nin hepsi farklı ise)

$$|C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \cdots \cap C_{i_k}| = |\left(B_{i_1} \cap B_{i_2} \cdots \cap B_{i_k}\right)^A| = (n-k)^m$$

bulunur. Eşitlik 1 de her bir toplamdaki terimler eşittir ve terim sayıları sırasıyla $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \ldots, \binom{n}{n}$ olur. Dolayısıyla A dan B ye örten fonksiyonların sayısı:

$$\begin{aligned}
& n^m - \left(\binom{n}{1}(n-1)^m - \binom{n}{2}(n-2)^m + \cdots (-1)^{n-1}\binom{n}{n}0^m\right) \\
= \; & n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \cdots (-1)^{n}\binom{n}{n}0^m \\
= \; & n^m + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}(n-i)^m \\
= \; & \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{n-i}(n-i)^m
\end{aligned}$$

olur ($m = 0$ ise, bu toplamın son terimindeki $0^0 = 1$ kabul edilecektir)