Fonksiyonel Analiz Problemleri 1

Aşağıdaki sorularda, aksi belirtilmedikçe, $\mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) üzerinde mutlak değer metriği kullanılacaktır. $\mathbb{R}^2$ üzerinde : $d_1((x,y),(x',y')) = |x-x'| + |y-y'|$, $d_2((x,y),(x',y')) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$, $d_\infty((x,y),(x',y')) = \max\{|x-x'|, |y-y'|\}$

Problemler

1. (X,d) bir metrik uzay ve $\emptyset \neq Y \subseteq X$ olsun. $d' : Y \times Y \to \mathbb{R}, \quad d'(x,y) = d(x,y)$ olsun. (Y,d') ikilisinin de bir metrik uzay olduğunu gösterin (d': kısıtlanmış metrik)

2. $\mathfrak{R}[a,b] = \{f | f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f,\ [a,b]$ aralığında (Riemann anlamında) integrallenebilirdir$\}$ olsun. $d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$, $\mathfrak{R}[a,b]$ üzerinde bir metrik midir? İddianızı ispatlayınız.

3. (Y,d) bir metrik uzay ve $X \neq \emptyset$, $f : X \to Y$ bir fonksiyon (dönüşüm) olsun. $d' : X \times X :\to \mathbb{R}$, $d'(x,x') = d(f(x), f(x'))$ olarak tanımlayalım. Şunları gösteriniz:

   (a) d', X üzerinde bir metrikdir $\Leftrightarrow$, f 1-1 dir.

   (b) f 1-1 ise, $f : (X,d') \to (Y,d)$ düzgün süreklidir.

4. * (X,d) bir metrik uzay olsun. $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ de, X üzerinde bir metrikdir ve bu iki metrik denktir. (İpucu: üçgen eşitsizliğini göstermek için $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{t}{1+t}$ fonksiyonunun artan olduğunu gösterip, bundan yararlanınız)

5. $\mathbb{R}^2$ üzerindeki üç metriğin (d_1, d_2, d_∞) ikişer ikişer, birbirlerine denk oluğunu gösterin.

6. $\mathbb{R}^2$ üzerindeki ayrık metriğin diğer üç metriğe (d_1, d_2, d_∞) **denk olmadığını** gösterin. (Bunlardan birine denk olmadığını göstermek yeterlidir. Neden?)

7. (X,d) bir metrik uzay, $\emptyset \neq A, B \subseteq X$ olsun. $D(A)$: A nın çapını göstermek üzere, aşağıdakileri gösterin:

   (a) $d(A) = 0 \Leftrightarrow A$ nın tek bir elemanı vardır.

   (b) A ve B sınırlı ise $A \cup B$ de sınırlıdır.

   (c) $D(A \cup B) \leq D(A) + D(B)$ her zaman doğru mudur?

   (d) $A \cap B \neq \emptyset$ ise $D(A \cup B) \leq D(A) + D(B)$ olduğunu gösterin.

8. $\mathbb{R}^2$ üzerindeki üç metrik (d_1, d_2, d_∞) için de $D(B((a,b),r) = 2r)$ olduğunu gösterin.

9. $C[a,b]$ üzerindeki integral ile tanımlı metrik için de ($\forall f \in C[a,b]$ ve $\forall r > 0$ için) $D(B(f,r) = 2r)$ olduğunu gösterin.

10. $\mathbb{R}$ üzerindeki $d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ metriği için $D(\mathbb{R}) = 1$ olduğunu gösterin.

11. * $\mathbb{R}$ üzerindeki $d(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ metriği ile mutlak değer metriğinin denk metrikler olduğunu gösterin.

12. ** (X,d) bir metrik uzay, $d'(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ metriği ile d metriğinin denk metrikler olduğunu gösterin.

13. $X=C[0,2], d(f,g)=\int_0^2|f(x)-g(x)|\,dx$ ve $T:X\to\mathbb{R},\ Tf=\int_0^1 f(x)\,dx$ (integralin sınırlarına dikkat) olsun. T nin düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

14. $X=C[0,1], d$: sup metriği ve $T:X\to\mathbb{R},\ Tf=\int_0^1(f(x))^2\,dx$ olsun. T nin **sürekli olduğunu** ama **düzgün sürekli olmadığını** gösteriniz.

15. (X,d) bir metrik uzay ve $a\in X$ olsun. $f(x)=d(x,a)$ şeklinde tanımlı $f:X\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun (düzgün) sürekli olduğunu gösterin.

16. (X,d) bir metrik uzay olsun. $d:X\times X\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun ($X\times X$ uzayında, $\bar{d}((x,x'),(y,y'))=\max\{d(x,x'),d(y,y')\}$ metriği kullanıldığında) sürekli olduğunu gösterin.

17. $X=C^1[0,1]=\{f|f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f\ \text{ sürekli türevlenebilirdir. }\}$,
$d(f,g)=\sup_{0\le x\le 1}|f(x)-g(x)|+\sup_{0\le x\le 1}|f'(x)-g'(x)|$ ve
$Y=C[0,1],\ d'(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|\,dx$ olsun.
$T:X\to Y,\quad T(f)=\frac{df}{dx}=f'$ dönüşümünün düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.
(Ama X üzerinde sup metriği kullanıldığında sürekli olmuyor.)

18. * (X,d) bir metrik uzay ve $\emptyset\ne A\subseteq X$ olsun. $f(x)=d(x,A)=\inf\{d(x,a):a\in A\}$ şeklinde tanımlı $f:X\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun (düzgün) sürekli olduğunu gösterin.

19. $X\ne\emptyset,\ d$ ayrık metrik olsun. Aşağıdakileri gösterin:

    (a) (x_n) bir Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow$ (x_n) dizisinin sabit bir kuyruğu vardır.

    (b) (x_n) yakınsaktır $\Leftrightarrow$ (x_n) dizisinin sabit bir kuyruğu vardır.

    (c) (X,d) bir tam metrik uzaydır.

20. $(X,d),(Y,d')$ iki metrik uzay ve $f:X\to Y$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdakileri gösterin:

    (a) (x_n) yakınsak bir dizi ve f **sürekli** ise $(f(x_n))$ de yakınsak bir dizidir (ve $\lim f(x_n)=f(\lim x_n)$ olur).

    (b) f **düzgün sürekli** ve (x_n) bir Cauchy dizisi ise $(f(x_n))$ dizisinin de bir Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.

    (c) ** (x_n) bir Cauchy dizisi ve f **sürekli** ama $(f(x_n))$ bir Cauchy dizisi **olmayacak** şekilde $(X,d),(Y,d')$ metrik uzayları, (x_n) dizisi ve f dönüşümü bulunuz.

    (d) * Eğer her yakınsak (x_n) dizisi için $(f(x_n))$ de yakınsak bir dizi oluyorsa, f nin sürekli olduğunu gösteriniz.

21. (X, d_1), (Y, d_2) iki metrik uzay olsun. $(X \times Y)$ üzerinde maks veya toplam veya $d((x,y),(x',y')) = \sqrt{d_1((x,x')^2 + d_2(y,y')^2}$ metriklerinden biri olsun. (x_n), X uzayında, (y_n), Y uzayında birer dizi olsun. Aşağıdakileri gösterin:

   (a) $((X \times Y, d)$ uzayında) $((x_n, y_n))$ dizisi yakınsaktır $\Leftrightarrow$ (x_n) ve (y_n) dizilerinin her ikisi de yakınsaktır.

   (b) $((X \times Y, d)$ uzayında) $((x_n, y_n))$ dizisi bir Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow$ (x_n) ve (y_n) dizilerinin her ikisi de Cauchy dizisidir.

22. (X, d) bir metrik uzay ve $\emptyset \neq A \subseteq X$ olsun. $(d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$ olmak üzere) Aşağıdakileri gösterin:

   (a) $\forall x \in X$ için:
   $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow \lim x_n = x$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A$ olacak şekilde bir (x_n) dizisi vardır.

   (b) A **kapalı** ve $x \notin A$ ise $\forall a \in A$ için $d(x, a) \geq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır.

   (c) A kapalıdır $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$ için $(d(x, A) = 0 \Rightarrow x \in A)$

23. $X = \mathbb{R}^2$, $d((x,y),(x',y')) = \max\{|x - x'|, |y - y'|\}$ $\quad z_n = (\frac{1}{n}, 1 + 2^{-n})$olsun.

   (a) $\lim z_n = (0, 1)$ olduğunu gösterin.

   (b) Yukarıdaki örneği, $\mathbb{R}^2$ deki Öklid metriği için gösterin.

24. (X, d) bir metrik uzay ve (x_n), uzayında bir dizi ve $x \in X$ olsun. Aşağıdakiler eşdeğerdir:

   (a) $d(x_n, x) \to 0$ ($\mathbb{R}$ de)

   (b) $\lim x_n = x$

25. (X, d) bir metrik uzay, (x_n), X de **sınırlı** bir dizi ve ($\forall n \in \mathbb{N}$ için) $D_n = \sup\{d(x_k, x_m) : k, m \geq n\}$ (dizinin bir kuyruğunun görüntü kümesinin çapı) olsun. O zaman aşağıdaki önermelerin eşdeğer olduğunu gösteriniz:

   (a) ($\mathbb{R}$ de) $D_n \to 0$

   (b) (x_n) bir Cauchy dizisidir.

26. (Bir metrik uzayda) Yakınsak bir dizinin sınırlı olduğunu, **doğrudan** (Cauchy dizisi kavramı kullanmadan) gösteriniz.

27. (X, d) bir metrik uzay, $\emptyset \neq Y \subseteq X$ olsun. Kısıtlanmış metriği de d ile gösterelim.

   (a) $(x_n), Y$ de bir Cauchy dizisi ise $(x_n), X$ de bir Cauchy dizisidir.

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n \in Y$ ve $(x_n), X$ de bir Cauchy dizisi ise $(x_n), Y$ de bir Cauchy dizisidir.

   (c) $(x_n), Y$ de yakınsak bir dizi ise $(x_n), X$ de yakınsak bir dizidir (ve limiti de aynı noktadır).

(d) $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n \in Y$ ve $(x_n), X$ de yakınsak bir dizi ve $\lim x_n \in Y$ ise $(x_n), Y$ de yakınsak bir dizidir (ve limiti de aynı noktadır).

(e) $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n \in Y$ ve $(x_n), X$ de yakınsak bir dizi ve $\lim x_n \notin Y$ ise (Y, d) tam metrik uzay değildir.

28. (X, d) bir metrik uzay olsun. Aşağıdakileri gösterin:

(a) Yakınsak bir dizinin her alt dizisi de yakınsaktır ve aynı limite sahiptir.

(b) (Kuyruk teoremi) $k \in \mathbb{N}$ olsun. $\lim x_n = x \Leftrightarrow \lim x_{n+k} = x$

(c) Bir Cauchy dizinin her alt dizisi de bir Cauchy dizisidir.

(d) Bir Cauchy dizinin bir alt dizisi yakınsak ise o (asıl) dizi de yakınsaktır (ve aynı limite sahiptir).

29. $\emptyset \neq X$ ve d ve d', X üzerinde iki metrik olsun. k_1, k_2 iki pozitif sabit ve $\forall x, y \in X$ için $k_1 d(x, y) \leq d'(x, y) \leq k_2 d(x, y)$ sağlansın. (NOT: bazı matematikçiler, bu koşulu d ve d' **denk metrik olması tanımı** olarak kabul eder.) Aşağıdakileri gösterin:

(a) d ve d' (aynı topolojiyi tanımlamaları anlamında) denk metriklerdir.

(b) d' metriğine göre her yakınsak dizi, d' metriğine göre de yakınsaktır ve aynı limite sahiptir.

(c) d metriğine göre her yakınsak dizi, d metriğine göre de yakınsaktır ve aynı limite sahiptir.

(d) d metriğine göre her Cauchy dizisi, d' metriğine göre de bir Cauchy dizisidir.

(e) d' metriğine göre her Cauchy dizisi, d metriğine göre de bir Cauchy dizisidir.

(f) (X, d) metrik uzayı tamdır $\Leftrightarrow$ (X, d') metrik uzayı tamdır.

(g) d ve d' (aynı topolojiyi tanımlamaları anlamında) denk metrikler oluğunda, bu eşitsizliği sağlayan k_1, k_2 sabitleri var olmak zorunda değildir.

(h) $\mathbb{R}^2$ üzerindeki üç metrik (d_1, d_2, d_∞) için de (ikişer ikişer) böyle (k_1, k_2) sabitleri bulun.

30. (X, d), (Y, d') iki metrik uzay ve $f : (X, d) \to (Y, d')$ **düzgün sürekli** bir dönüşüm olsun. Eğer (X, d) bir **tam metrik uzay** ise $f(X)$, Y nin **kapalı** bir alt kümesidir.

31. (X, d) bir tam metrik uzay ve $\emptyset \neq A \subseteq X$ olsun. Aşağıdakinin doğruluğunu gösterin: (A, d') (kısıtlanmış metrik) bir tam metrik uzadır $\Leftrightarrow$, A, X in kapalı alt kümesidir.

32. $X = C[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$, $d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$ ve $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $f_n(x) = x^2 + \frac{x}{n}$, $f(x) = x^2$ olsun. $\lim f_n = f$ olduğunu gösterin.

33. (X, d), (Y, d') iki metrik uzay $T : X \to Y$ bir dönüşüm ve bir $q > 0$ gerçel sayısı için $\forall x, x' \in X$ için $d'(Tx, Tx') \leq q d(x, x')$ olsun. T nin düzgün sürekli olduğunu gösterin.

34. (X,d_1) ve (Y,d_2) iki metrik uzay olsun. Eğer her iki uzay da tam metrik uzay ise, $d((x,y),(x',y')) = d_1(x,x') + d_2(y,y')$ metriği olmak üzere, $(X \times Y, d)$ metrik uzayı da tam metrik uzaydır.

35. Yukarıdaki iddianın, $X \times Y$ üzerindeki $d'((x,y),(x',y')) = \max\{d_1(x,x'), d_2(y,y')\}$ ve $\overline{d}((x,y),(x',y')) = \sqrt{(d_1(x,x'))^2 + (d_2(y,y'))^2}$ metrikleri için de doğru olduğunu gösterin.

36. $C[0,2], d$:sup metriği olsun. $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ nx - n + 1, & 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ fonksiyonları olsun. (f_n) dizisinin bir Cauchy dizisi **olmadığını** gösterin.

37. (X,d) bir **tam** metrik uzay ve $\emptyset \neq Y \subsetneqq X$ **kapalı** bir alt uzay olsun. (Y,d) (kısıtlanmış metrik) uzayının da bir tam metrik uzay olduğunu gösterin. Y kapalı değilse (Y,d) uzayının tam metrik uzay **olmadığını** gösteriniz.

38. A, $\mathbb{R}$ de bir aralık, $f : A \to A$ türevlenebilen bir fonksiyon olsun.
Eğer, bir $0 < q < 1$ sayısı için, $\forall x \in A$ için $|f'(x)| \leq q$ oluyor ise f nin bir sıkıştırma dönüşümü olduğunu gösterin. (Biraz zor bir soru) Böyle bir q sayısı yoksa, f nin sıkıştırma dönüşüm olmadığı sonucuna varabilir miyiz?