MT 221 GEOMETRİLER 2014-2015 DÖNEM SONU SINAVI ÇÖZÜMLER

uzunluk (5)	doğrusal olmayan (15)	bir boyutlu (12)	sıralama (16)	doğru (9)
denklik (11)	uzaylarına (13)	$\cos c$ (1)	lineer (14)	sonsuzdaki (10)
$\cosh b$ (2)	açılar (4)	değişmeyen (17)	zıt (19)	Poincare (20)
doğrusal (7)	kesiştiği (6)	altıgen (8)	sinh (3)	dönme (18)

ÖKLİDYEN OLMAYAN GEOMETRİ, PROJEKTİF GEOMETRİ, KLEİN' İN GEOMETRİ TANIMI:

Lobachevsky ve J. Bolyai öklidyen olmayan geometride bazı formüller buldu ve bunların küresel geometrideki formüllere benzerliğini farketti. Örneğin (kürenin yarıçapı 1 iken) küresel geometride (c: hipotenüs) Pisagor teoremi 1 $= \cos a \cos b$ iken öklidyen olmayan geometride bu formül (eğrilik -1 iken) $\cosh c = \cosh a$ 2 şeklinde oluyordu. benzer şekilde, diğer her formülde de cos yerine cosh, sin yerine 3 beliriyordu. Fakat Öklid geometrisinde olmayan ama küresel geometride pek çok formülde olduğu gibi, kürenin yarıçapına benzer bir sabit ortaya çıkıyordu. Öklidyen olmayan geometrinin (derste sözünü ettiğimiz) üç modelinden, Poincare nin modellerinde 4 göründüğü gibidir Klein-Beltrami modeli böyle değildir.

Projektif Geometri

Projektif Geometri, 5 , açı, alan gibi sayıların var olmadığı ve (düzlemdeki) tüm doğruların 6 geometri olarak özetlenebilir. Pappus ün (MS IV. yy) kesişen iki doğru üzerinde alınan altı noktadan oluşturulan üç çift doğrunun kesişim noktalarının 7 olacağı ile ilgili teoremi bu (henüz adı bile konmamış) geometrinin ilk teoremi olarak kabul edilir. Projektif geometri, XVII. yy da Fransız mimar G. Desargues' in kitabı ile resmi olarak ortaya çıkmıştır. Pascal' ın (Pappus ün teoremine benzeyen) gizemli 8 teoremi de projektif geometrinin bir teoremidir. Bu kitap pek ilgi görmemiş ise de daha sonra önemi farkedilmiştir. XIX. yy. da projektif geometri çok incelenmiştir ve F. Klein' e göre, tüm geometrileri kapsayan bir "üst geometri" dir.

Projektif geometrinin geometrik oluşturulması: (Öklid) düzleminin noktalarına (düzlemde seçilen bir) noktadan geçen her 9 için yeni bir nokta eklenir. Bu yeni noktalarda "sonsuzdaki noktalar" denir. Düzlemdeki tüm doğrulara yeni (seçilen noktadan geçen ve o doğruya paralel olan doğruya karşılık bir nokta "sonsuzdaki" noktalar) eklenerek projektif doğrular elde edilir. Ayrıca sonsuzdaki noktaların tümü de bir doğru oluşturur ve " 10 doğru" olarak adlandırılır.

Projektif geometrinin cebirsel olarak oluşturulması: Üç boyutlu uzayın ($\mathbb{R}^3$) başlangıç noktası hariç noktaları arasında tanımlanan bir 11 bağıntısına göre denklik sınıfları projektif düzlemin noktalarını oluşturur. Projektif düzlemi(n noktaları kümesini) $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ ile göstereceğiz. Bu küme 3-boyutlu $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının 12 alt vektör uzaylarının kümesi ile aynıdır. Doğrular ise $\mathbb{R}^3$ ün iki boyutlu bir alt uzayındaki, 0 hariç, vektörlerin denklik sınıflarını kümesidir. Dolayısıyla, projektif düzlemde doğrular $\mathbb{R}^3$ ün iki-boyutlu alt vektör 13 karşı gelir. Bu iki farklı kuruluşun aynı sonucu verdiği kolayca gösterilir. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 14 ve tersinir ise $\overline{T} : \mathbb{R}\mathbf{P}^2 \to \mathbb{R}\mathbf{P}^2$, $\overline{T}([v]) = [Tv]$ olarak tanımlayıp "projektif dönüşüm" olarak adlandıracağız. Bir projektif dönüşüm ile birbirine dönüşen şekillere "eş" (veya "denk") şekiller deriz. Buna göre her üçgen (15 üç nokta) denk olur (bu nedenle projektif trigonometri diye bir şey yoktur!). Her doğru parçası (farklı iki nokta) başka bir doğru parçasına eş olur. Bir doğru üzerindeki noktalar arasında 16 yoktur, bir doğru düzlemi ikiye ayırmaz.

Burada ilginç bir nokta, $\mathbb{R}$ yerine herhangi bir cisim kullanılabilir, o zaman da söylediğimiz her şey yine doğru kalacaktır. Daha da ilginç olanı, bazı ekstra geometrik aksiyomları da sağlayan her projektif geometrinin, bir cisimden, bu şekilde oluşacağı da ispatlanabilmektedir.

Klein' in Geometri tanımı

Klein a göre:
Bir küme ve onun simetrilerinin bir G alt grubu verildiğinde, geometri; bu grup altında 17 özelliklerin incelenmesidir.
Buna göre Öklid geometrisinde: $X = \mathbb{R}^2$, G, düzlemin; öteleme, 18 ve yansımalarını içeren en küçük alt gruptur.
Küresel geometride: $X =$ kürenin 19 noktalarının özdeşleştirilmesi ile oluşan kümedir. G ise $O(3)$ grubudur.
Hiperbolik Geometride: $X = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ (20 üst yarı düzlem modeli) ve G, sanal eksene göre yansımayı ve $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $(a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1)$ (Möbius) dönüşümlerini içeren en küçük gruptur.
Projektif Geometride: $X = \mathbb{R}\mathbf{P}^2$, $G = \{\overline{T} \mid T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineer ve tersinir$\}$ grubudur.