

MTS 221 Geometriler (Kasım 2015) Ara Sınav Çözümler

Ptolemy (7)	Saccheri (8)	üçgenin (9)	Benzer (10)	Doğrusal (12)
büyük (11)	tanım (3)	Klein (17)	düzlem (1)	Bolyai (15)
Proclus (5)	şüpheler (16)	logaritma (20)	Disk (18)	tanjant (19)
beşinci (14)	48 (2)	Lobaçevsky (13)	doğruların (4)	eşdeğer (6)

ÖKLİDYEN OLMAYAN GEOMETRİNİN KISA TARİHİ:

MÖ. 300 yıllarında İskenderiye de yaşayan Öklid (Euclid) in yazdığı 13 ciltlik “Öğeler” adlı eserinin, birinci cildi **düzlem** geometrisi konusundadır. Bu kitap dünyada en çok basılan matematik kitabı olup yüzyıllarca Avrupa da ders kitabı olarak kullanılmıştır. Bu ciltte, çoğu önceden bilinen ve bugün çoğu ortaokul/lise kitaplarında sözü geçen, **48** önerme ispatlanmıştır. Fakat asıl önemli olan, daha önceki matematikçilerden farklı olarak, Öklid in, bu ciltte (ve diğer ciltlerde) tanımlar ve kabullerini başlangıçta belirtmesidir. Daha önce yazılan kitaplarda bunlar bulunmaz. Bu kitaptaki (ve diğer kitaplardaki) doğruluğu kabul edilen önermeler iki kısma ayrılmıştır: (bugün kullanılan adları ile) (genel olan) Aksiyomlar ve (geometriye özel olan) Postulatlar. Bu ciltte **23 tanım**, 5 aksiyom, 5 postulat ve 48 önerme bulunmaktadır (bazı çevirilerde bu sayılar farklıdır).

Postulatlar arasında en çok tartışılanı beşinci postulatdır. Bu postulat bazı koşullarda **doğruların** keşişeceği şeklindedir. Öklid, bu postulatı, ilk 28 önermenin ispatında kullanmaz. MS. 5. yüzyılda (Bizanslı) **Proclus** adlı bir filozof, Öklid in bu kitabı üzerine inceleme yazmış ve bu postulatın eşdeğer ama daha basit bir şekilde ifade edilebileceğini ve bu ifadenin daha önce (daha çok astronomi üzerinde yaptıkları ile bilinen MS 2. yy da yaşamış) Ptolemy tarafından da farkedildiğini belirtmiştir. Bu **eşdeğer** şekline, daha sonraları 18. yy da Öklid in geometrisi üzerine bir kitap yazmış olan, İngiliz matematikçi Playfair in adıyla anılır ve bugünkü pek çok kitapta Öklid in beşinci postulatı yerine bu eşdeğer şeklinin kullanılmaktadır. Proclus, ayrıca bu postulatın kabul edilmesine gerek olmadığını ve ispatlanabileceğini düşünmüştür. **Ptolemy** nin de böyle düşünüp beşinci postulatın bir ispatını yaptığını belirtmiş ama ispatındaki hatayı belirtmiştir.

Ptolemy ve Proclus un bu düşüncesi, sonraki 1600 yıl boyunca pek çok matematikçi tarafından da paylaşılmış ve (bilinen) yüzlerce ünlü veya ünsüz matematikçi Öklid in beşinci postulatını ispatlamaya çalışmış, bazıları ispatladığını iddia etmiştir. Fakat her birinin “ispat” ındaki yanlışlığı, başka biri farketmiştir. Bunlar arasında, Ptolemy, Proclus, Al Haytam (Alhazen), Ömer Hayyam, Nasreddin Al-Tusi, Wallis, Legendre, Farkas (baba) Bolyai, Lambert ve Saccheri en ünlüleridir. **Saccheri**, bugün bir kopyasını (internette) bulabildiğimiz kitabında bu postulatı ispatladığını açıkça iddia etmektedir.

İspatladığını düşünenlerin genellikle düştüğü hata, doğru görünen, ama ispatı ancak beşinci postulatı kullanarak yapılabilen, başka bir önermeyi doğru kabul etmeleridir. Bu gibi önermelerin kısa bir listesi:

1. Bir **üçgenin** iç açıları toplamı iki dik açıdır.
2. Yöndeş açılar eşittir.
3. **Benzer** ama eş olmayan üçgenler vardır.
4. Dikdörtgenler vardır

5. İstendiđi kadar **büyük** alana sahip üçgen çizilebilir.
6. Pisagor Teoremi
7. Kosinüs Teoremi
8. **Doğrusal** olmayan üç noktadan bir çember geçer.

Nihayet 1829 yılında, Kazan Üniversitesi'nden **Lobaçevski**, üniversitesinin çıkardığı (İngilizce adı ile) Kazan Messenger dergisinde, Rusça yazılmış bir makalede, Öklid'in **beşinci** postulatını sağlamayan "hayali bir geometrinin" varlığını iddia edip bu geometride bazı teoremler ispatladı. 1832'de (baba) F. Bolyai'nın Matematik kitabının ekinde (oğul) J. Bolyai, latince, 26 sayfalık, başlığı "Uzayın Mutlak Geometrisi" olarak çevrilebilecek bir makale yazdı. Kendisi de Matematik profesörü olan baba **Bolyai**, kitap basılmadan önce, okul arkadaşı olan, Gauss'a bir mektup yazıp oğlunun yazdıkları hakkında fikrini sordu. Gauss, mektubunda, (özetle) yazdıklarını doğruluğunu onayladı ama tüm bunları kendisinin yıllar önce bulduğunu ama yazmaya vakit bulamadığını belirtti. Bunlardan sonra Öklidyen olmayan geometri daha yaygın olarak bilinmeye başladı. Fakat böyle bir geometrinin varlığı konusunda **şüpheleri** vardı. Yani Öklid'in Beşinci postulatının tersini doğru kabul edersek bir çelişki ortaya çıkmayacağına hala herkes ikna olmamıştı. Daha sonra bulunan "Modeller" ile ancak bu şüphe ortadan kaldırılabildi. Bu modellerden en basit olan üç tanesi şunlardır:

- Beltrami-Klein (kısaca Klein) modeli
- Poincare Disk modeli
- Poincare Üst Yarı Düzlem modeli

Klein modelinde noktalar kümesi, (Öklid geometrisindeki) bir çemberin içindeki noktalardır. Doğrular, bu çemberin (uç noktaları olmayan) kirişleridir. Uzaklık ise (Öklid anlamında) uzaklıklardan bir formül ile hesaplanır.

Poincare **Disk** modelinde noktalar kümesi, kompleks (karmaşık) düzlemde, birim dairenin noktalarıdır. Doğrular ise çaplar ve birim çemberi dik kesen çemberlerin birim daire içinde kalan yaylarıdır (yine uç noktalar hariç). Uzaklık formülü ters hiperbolik **tanjant** fonksiyonunu içerir.

Poincare Üst Yarı Düzlem modelinde ise noktalar kümesi, kompleks düzlemde reel (gerçel) eksenin yukarısında kalan noktalardır. Doğrular ise (bu yarı düzlemdeki) düşey (düz) çizgiler ve merkezi gerçel ekseninde olan yarım çemberlerdir. Uzaklık formülü, ters hiperbolik tanjant veya daha basit olarak **logaritma** içeren bir ifadedir.