MT 321

Diferansiyel Formlar ve Genelleştirilmiş Stokes Teoremi ile ilgili Problemler

1.a)$\omega = xyzdx \wedge dy$ $\lambda = xy^2zdz$ ise $\omega \wedge \lambda = \lambda \wedge \omega$ olduğunu gösteriniz.

b)$\omega = ye^x dy$ $\lambda = uz\cos xdx \wedge dz \wedge du$ ise $\omega \wedge \lambda = -\lambda \wedge \omega$ olduğunu gösteriniz.

2.$\omega = ye^x dy$ ve $\lambda = xy^2zdz$ ise $d(\omega \wedge \lambda) = (d\omega) \wedge \lambda - \omega \wedge (d\lambda)$ olduğunu gösteriniz.

3.$\sigma : I^n \to \mathbb{R}^n$ $(k \geq 1)$ $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ ise ve σ değişkenlerden birine bağlı değilse $\sigma^*\omega = 0$ olduğunu gösteriniz.

4.$\sigma : I^2 \to \mathbb{R}^2$,$\omega = dx \wedge dy$ ise $\sigma^*\omega = J_\sigma\, dt_1 \wedge dt_2$ (J_σ : Jakobiyan) olduğunu gösteriniz.

5.$F : I^n \to \mathbb{R}^n$ *lineer* ise $F^*(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n) = (\det F)dt_1 \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_n$ olduğunu gösteriniz. ($n = 2$,3 için yapınız)

6.$\sigma(s,t) = (s^2, s^2 - t, st^2)$,$\omega = xy^2zdx$,$\lambda = xyzdy$ olsun.Aşağıdakileri gösteriniz:

a)$\sigma^*(\omega \wedge \lambda) = (\sigma^*\omega) \wedge (\sigma^*\lambda)$ b) $\sigma^*(d\omega) = d(\sigma^*\omega)$

7.$\sigma_1 : I \to \mathbb{R}^2, \sigma_1(t) = (t,t^2), \sigma_2 : I^2 \to \mathbb{R}^3$ $\sigma_2(x,y) = (xy, y^3, e^y)$, $\omega = zuvdz$ olsun. $\sigma_1^*(\sigma_2^*\omega) = (\sigma_2 \circ \sigma_1)^*\omega$ olduğunu gösteriniz.(Bu her zaman doğrudur)

8.$\sigma_1^*(\sigma_2^*\omega) = (\sigma_2 \circ \sigma_1)^*\omega$ olduğunu kullanarak her ω formu için $\int_{\sigma_1} \sigma_2^*\omega = \int_{\sigma_2 \circ \sigma_1} \omega$ olduğunu gösteriniz.

9.$\sigma : I^2 \to \mathbb{R}^3, \mu(s,t) = \sigma(t,s)$ ise önce $\partial\sigma = -\partial\mu$ olduğunu, daha sonra her ω 1-formu için $\int_\mu d\omega = -\int_\sigma d\omega$ olduğunu gösteriniz.

10.$\omega_1 - \omega_2$ kapalı bir $(k-1)$form ise her σ k-simpleksi için $\int_{\partial\sigma} \omega_1 = \int_{\partial\sigma} \omega_2$ olduğunu gösteriniz.

11.$\partial\sigma_1 = \partial\sigma_2$ ise her ω formu için $\int_{\sigma_1} d\omega = \int_{\sigma_2} d\omega$ olduğunu gösteriniz.

12.$\sigma : I^k \to \mathbb{R}^n$ bir k-simpleks $(k \geq 2)$ ve σ , I^knın yüzlerinde (sınırında) sabit olsun.Her $\omega \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ için $\int_\sigma d\omega = 0$ olduğunu gösteriniz.

13. Her k-simpleks $(k \geq 2)$ σ için $\partial(\partial\sigma) = 0$ olduğunu gösteriniz.

14.$S = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z = f(x,y)\}$ yüzeyi olsun ve yukarı dönük normallerle yönlendirilsin.$F = f\vec{i} + g\vec{j} + h\vec{k}$, $\sigma(s,t) = (s,t,f(s,t)), \omega = fdy \wedge dz + gdz \wedge dx + hdx \wedge dy$ $(=\Psi^{-1}\omega)$ olsun. $\int_S F \bullet n\, d\sigma = \int_\sigma \omega$ olduğunu gösteriniz.

15.Her $k,m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$ ise $\lambda \wedge \omega = (-)^{km}\omega \wedge \lambda$ olduğunu tümevarımla gösteriniz.($k + m$ üzerine tümevarım yapılabilir)

İpucu:$\lambda = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \bullet \bullet \wedge dx_{i_k}$ve $\omega = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \bullet \bullet \wedge dx_{i_m}$ iken yapmak yeterlidir)

16. Her $f,g \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)$ için $d(fg) = df \wedge g + f \wedge dg$ ($=fdg + gdf$) olduğunu gösteriniz.

17.a) ω tam ise $F^*\omega$ nın da tam olduğunu gösteriniz.

b) ω kapalı ise $F^*\omega$ nın da kapalı olduğunu gösteriniz.

c) ω kapalı değil ama $F^*\omega$ kapalı olacak şekilde F ve ω bulunuz.