MT 321
Diferensiyel Geometri
Ara Sınavı Çözümler
B

1. a) $\int_S (\nabla \times F) \bullet n\, d\sigma = \int_C F \bullet dr$. Burada S, n birim normal vektör alanı ile yönlendirilmiş, C eğrisi (veya eğrileri) ile çevrili bir yüzey. C : S nin S ile uyumlu olarak yönlendirilmiş sınırı. F : bileşenleri sürekli türevlenebilen bir vektör alanı.

b) i) $F = y\vec{i}$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k} \text{ olur. } n = \pm \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|},$$

$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z, \nabla g = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}, \|\nabla g\| = \sqrt{4x^2+4y^2+1}$, $n = \pm \frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$.

Yukarı dönük olacağından + olmalıdır. $\int_S (\nabla \times F) \bullet n\, d\sigma = \int_S \frac{-1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} d\sigma = \int_{S_z} \frac{-1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \frac{\|\nabla g\|}{\left|\frac{\partial g}{\partial z}\right|} dA = -\int_{S_z} dA =$

$-(S_z$ nin alanı$) = -4\pi$ (S_z nin sınırı: $8 - x^2 - y^2 = 4$, yani $x^2 + y^2 = 4$ çemberi olduğundan)

ii) S yukarı dönük normallerle yönlendirilmiş olduğundan C nin xy –düzlemin izdüşümü saatin ters yönünde yönlendirilmiş olur. Bu nedenle C nin izdüşümü $x = 2\cos t, y = 2\sin t, t \in [0, 2\pi]$ ile parametrize edilebilir. C nin kendisi ise $x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 4$, $t \in [0, 2\pi]$ ile parametrize edilebilir.

$\int_C F \bullet dr = \int_C y dx = \int_0^{2\pi} 2\sin t\,(-2\sin t)\, dt = -4\pi$ bulunur. $\int_S (\nabla \times F) \bullet n\, d\sigma = \int_C F \bullet dr$ eşitliği gösterilmiş olur.

2. Genelleştirilmiş Stokes Teoremini : $\int_\sigma d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega$

i) $\sigma(s,t) = (s^3, st, t^2)$ olduğundan $x = s^3, y = st, z = t^2$ olur.

$d\omega = d(z+y) \wedge dx = dz \wedge dx + dy \wedge dx,$

$\sigma^*(d\omega) = (2tdt) \wedge (3s^2 ds) + (sdt + tds) \wedge (3s^2 ds) = (6s^2 t + 3s^3) dt \wedge ds$

$\phi_2(\sigma^*(d\omega)) = -(6s^2 t + 3s^3)$.

$\int_\sigma d\omega = \int_0^1 \int_0^1 -(6s^2 t + 3s^3)\, ds\, dt = -\int_0^1 (2t + \frac{3}{4})\, dt = -(1 + \frac{3}{4}) = \frac{-7}{4}$.

ii) $\partial\sigma = \sigma_1^1 - \sigma_1^0 - (\sigma_2^1 - \sigma_2^0) = \sigma_1^1 - \sigma_1^0 - \sigma_2^1 + \sigma_2^0$

$\sigma_1^1(s) = \sigma(1,s) = (1, s, s^2)$, $\sigma_1^0(s) = \sigma(0,s) = (0,0,s^2)$, $\sigma_2^1(s) = \sigma(s,1) = (s^3, s, 1)$, $\sigma_2^0(s) = \sigma(s,0) = (0,0,s^2)$

$(\sigma_1^1)^*\omega = 0, (\sigma_1^0)^*\omega = 0, (\sigma_2^1)^*\omega = (s+1)3s^2 ds, (\sigma_2^0)^*\omega = 0,$

$\phi_1((\sigma_2^1)^*\omega)) = 3s^3 + 3s^2$.

$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\sigma_1^1} \omega - \int_{\sigma_1^0} \omega - \int_{\sigma_2^1} \omega + \int_{\sigma_2^0} \omega = 0 - 0 - \int_0^1 (3s^3 + 3s^2)\, ds + 0 = -(\frac{3}{4} + 1) = \frac{-7}{4}$.

$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_\sigma d\omega$ gösterilmiş olur.

3. $\alpha(t) = (\sin(\tan t), \cos(\tan t), \tan t)$ $(t \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}))$

a)

$h^{-1}(t) = \int \|\alpha'(t)\| dt = \int \sqrt{(\cos(\tan t)\sec^2 t)^2 + (-\sin(\tan t)\sec^2 t)^2 + (\sec^2 t)^2}\, dt = \int \sqrt{2}\sec^2 t dt$

$= \sqrt{2}\tan t + C, C = 0$ alalım.

$t = h(s), h(s) = Arc\tan\frac{s}{\sqrt{2}}, \gamma(s) = \alpha(h(s)) = (\cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), \sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), \frac{s}{\sqrt{2}})$ birim hızda ve $\gamma \sim \alpha$ olur.

b) α : $x^2 + y^2 = 1$ silindiri üzerindedir ama β bu yüzey üzerinde değildir (Örneğin

$t = 3$ için $y = \ln 3 > 1$ dir) $\alpha(I) \neq \beta(J)$ olduğundan $\alpha \nsim \beta$ olur.

4.a) $\beta(s) = (f(s), g(s), h(s))$ $(s \in I)$ en az iki kez türevlenebilen birim hızda bir parametrik gösterim ve $\alpha(s) = (\frac{g(s)-f(s)}{\sqrt{2}}, h(s), \frac{g(s)+f(s)}{\sqrt{2}})$ $(s \in I)$ olsun.

$\alpha'(s) = \frac{g'(s)-f'(s)}{\sqrt{2}}\vec{i} + h'(s)\vec{j} + \frac{g'(s)+f'(s)}{\sqrt{2}}\vec{k}$, Her $s \in I$ için

$$\|\alpha'(s)\| = \sqrt{(\frac{g'(s)-f'(s)}{\sqrt{2}})^2 + (h'(s))^2 + (\frac{g'(s)+f'(s)}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{(f'(s))^2 + (g'(s))^2 + (h'(s))^2}$$

$= \|\beta'(s)\| = 1$ olur.

$$\kappa_\alpha = \left\|\alpha''(s)\right\| = \sqrt{(\frac{g''(s)-f''(s)}{\sqrt{2}})^2 + (h''(s))^2 + (\frac{g''(s)+f''(s)}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{(f''(s))^2 + (g''(s))^2 + (h''(s))^2}$$

$= \left\|\beta''(s)\right\| = \kappa_\beta$ olur.

b) Düzlemin (vektörel) denklemi $(v - p_0) \bullet \vec{u} = 0$ (p_0 : düzlemin bir noktası, u : düzleme dik bir vektör) olsun.Her $t \in I$ $(\gamma : I \to \mathbb{R}^3)$ için $(\gamma(t) - p_0) \bullet u =$ olur. Türev alınırsa (Her $t \in I$ için) $\gamma'(t) \bullet u = 0$ yani $\gamma'(t) \perp u$ bulunur Bu da γ' nun aynı düzlemde olması demektir. Bir kez daha türev alınırsa $\gamma''(t) \bullet u = 0$ yani $\gamma''(t) \perp u$ bulunur Bu da γ'' nun aynı düzlemde olması demektir.