MT 321Çalışma Soruları

1) Her $k,m \in N \cup \{0\}$ için $w \in \Omega^k(R^n)$, $\lambda \in \Omega^m(R^n)$ ise $\lambda \Lambda w = (-1)^{km} w \Lambda \lambda$ olduğunu gösteriniz.

2) $w = xy^2 zdx \in \Omega^1(R^3)$, $\lambda = xyzdy \in \Omega^1(R^3)$, $F : R^2 \to R^3$ $F(s,t) = (s^2, s^2 - t, st^2)$ olsun.

$a)$ $F^*(dw) = d(F^* w)$ olduğunu gösteriniz.

$b)$ $F^*(w \Lambda \lambda) = (F^* w) \Lambda (F^* \lambda)$ olduğunu gösteriniz.

3) $F : I^n \to R^n$ $(n \geq 1)$ $w \in \Omega^n(R^n)$ olsun. Eğer F değişkenlerden birine bağlı değilse $F^* w = 0$ olduğunu
gösteriniz.

4) $F : I^2 \to R^2$, $w = dx \Lambda dy$ ise $F^* w = J_F\ dt_1 \Lambda dt_2$ $(J_F : Jakobiyan)$ olduğunu gösteriniz.

Çözümler

1) $w = dx_{i_1} \Lambda dx_{i_2} \Lambda ...... \Lambda dx_{i_k}$, $\lambda = dx_{j_1} \Lambda dx_{j_2} \Lambda ...... \Lambda dx_{j_m}$ $dx_{i_t} \neq dx_{j_s}$ $(t,s) = \{1, \quad ,k\} \times \{1, \quad ,m\}$

$k + m < n$ aksi takdirde $w \Lambda \lambda = \lambda \Lambda w = 0$ olup eşitlik sağlanır.

$w \Lambda \lambda = dx_{i_1} \Lambda dx_{i_2} \Lambda ...... \Lambda dx_{i_k} \Lambda dx_{j_1} \Lambda dx_{j_2} \Lambda ...... \Lambda dx_{j_m} = (-1)^k dx_{j_1} \Lambda dx_{i_1} \Lambda dx_{i_2} \Lambda ...... \Lambda dx_{i_k} \Lambda dx$

$= (-1)^k (-1)^k dx_{j_1} \Lambda dx_{j_2} \Lambda dx_{i_1} \Lambda dx_{i_2} \Lambda ...... \Lambda dx_{i_k} \Lambda dx_{j_3} \Lambda .... \Lambda dx_{j_m}$ olur. Bu şekilde devam edilirse;

$w \Lambda \lambda = (-1)^{km} dx_{j_1} \Lambda dx_{j_2} \Lambda ...... \Lambda dx_{j_m} \Lambda dx_{i_1} \Lambda dx_{i_2} \Lambda ...... \Lambda dx_{i_k} = (-1)^{km} \lambda \Lambda w$ olur.

$2 - a)$ $dw = 2xyzdy \Lambda dx + xy^2 dz \Lambda dx$ olur.

$F^*(dw) = 2s^3 t^2 (s^2 - t)(2sds - dt) \Lambda 2sds + s^2 (s^2 - t)^2 (t^2 ds + 2stdt) \Lambda 2sds$

$= -4s^4 t^2 (s^2 - t) dt \Lambda ds + 4s^4 (s^2 - t)^2 tdt \Lambda ds$

$$F^*(dw) = (4s^4 t(s^2 - t)^2 - 4s^4 t^2 (s^2 - t)) dt \Lambda ds$$

$F^* w = 2s^4 (s^2 - t)^2 t^2 ds$

$$dF^* w = (4s^4 t(s^2 - t)^2 - 4s^4 t^2 (s^2 - t)) dt \Lambda ds = F^*(dw)$$

$2 - b)$ $w \Lambda \lambda = x^2 y^3 z^2 dx \Lambda dy \in \Omega^2(R^3)$

$F^*(w \Lambda \lambda) = (s^4 (s^2 - t)^3 s^2 t^4 2sds) \Lambda (2sds - dt)$

$$F^*(w\Lambda\lambda) = -2s^7(s^2-t)^3t^4 ds\Lambda dt$$

$F^*w = 2s^4(s^2-t)^2t^2ds,$
$F^*\lambda = s^3t^2(s^2-t)(2sds-dt) = 2s^4t^2(s^2-t)ds - s^3t^2(s^2-t)dt$
$(F^*w)\Lambda(F^*\lambda) = (2s^4(s^2-t)^2t^2ds)\Lambda(2s^4t^2(s^2-t)ds - s^3t^2(s^2-t)dt)$

$$(F^*w)\Lambda(F^*\lambda) = -2s^7(s^2-t)^3t^4 ds\Lambda dt = F^*(w\Lambda\lambda)$$

3) $F : I^n \to R^n \quad n \geq 1 \quad w \in \Omega^n(R^n)$ olsun. O halde $w = fdx_1\Lambda dx_2\Lambda \quad \Lambda dx_n$ şeklindedir.
$F(t_1, t_2, \quad , t_n) = (g_1, g_2, \quad , g_n)$ ve $g_j : I^n \to R$ değişkenlerden birine örneğin t_i değişkenine bağlı olmasın
$F^*w = f \circ F(dg_1\Lambda dg_2\Lambda \quad \Lambda dg_n) = f \circ F(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_1}{\partial t_i}dt_i)\Lambda(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_2}{\partial t_i}dt_i)\Lambda$
$\Lambda(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_n}{\partial t_i}dt_i) \in \Omega^n(R^n)$
$F^*w = gdt_1\Lambda dt_2\Lambda \quad \Lambda dt_n$ şeklindedir. Fakat dt_i terimi olmadığından $F^*w = 0$ olur.

4) $F : I^2 \to R^2 \;\; F(t_1, t_2) = (f = f(t_1, t_2), g = g(t_1, t_2))$ olsun
$F^*w = df\Lambda dg = (\frac{\partial f}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial f}{\partial t_2}dt_2)\Lambda(\frac{\partial g}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial g}{\partial t_2}dt_2)$

$$F^*w = (\frac{\partial f}{\partial t_1}\frac{\partial g}{\partial t_2} - \frac{\partial f}{\partial t_2}\frac{\partial g}{\partial t_1})dt_1\Lambda dt_2 = J_F dt_1\Lambda dt_2$$