

Fibonacci Sayılarının bir Formülü

$$F_0 = 0, F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \quad (\text{her } n \geq 0 \text{ için})$$

şeklinde tanımlanan Fibonacci sayıları için bir formül şöyle bulunabilir:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ olsun. $F_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n$ olduğundan bu kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $\geq \frac{3}{5} > 0$ olur.

$xf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+1}$ ve $x^2 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+2}$ olduğundan;

$$\begin{aligned} (x^2 + x)f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1} x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-2} + F_{n-1}) x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = f(x) - x \end{aligned}$$

olduğundan $f(x) = \frac{-x}{x^2 + x - 1}$ olur. Bu rasyonel fonksiyonu basit kesirlere ayırıştıralım: ($\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: Altın Oran olmak üzere) $x^2 + x - 1 = (x + \phi)(x - \frac{1}{\phi})$ olduğundan

$$\frac{-x}{x^2 + x - 1} = \frac{A}{x + \phi} + \frac{B}{x - \frac{1}{\phi}}$$

eşitliğinde $A = \frac{-\phi^2}{1 + \phi^2}$, $B = \frac{-1}{1 + \phi^2}$ bulunur. $\frac{\phi}{1 + \phi^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ dir. Düzenlenerek

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\phi}{1 + \phi^2} \left(\frac{1}{1 - \phi x} - \frac{1}{1 + \frac{x}{\phi}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \phi x} - \frac{1}{1 + \frac{x}{\phi}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\phi x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{\phi} \right)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\phi^n - (-\phi^{-1})^n}{\sqrt{5}} \right) x^n \end{aligned}$$

Buradan da, her $n \geq 0$ için

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi^{-1})^n}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^n - (1 - \phi)^n}{\sqrt{5}}$$

olduğu sonucuna varılır. Bu formülden

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$$

olduğu kolayca görülür.